

# חדו"א 1 מ



## תוכן העניינים

|     |                                                             |     |
|-----|-------------------------------------------------------------|-----|
| 1.  | מבוא מתמטי לקורס                                            | 1   |
| 2.  | סדרות                                                       | 32  |
| 3.  | הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות (ללא ספר) | 65  |
| 4.  | הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות                            | 87  |
| 5.  | גבול של פונקציה                                             | 103 |
| 6.  | רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים                        | 117 |
| 7.  | הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות         | 129 |
| 8.  | חישוב נגזרת של פונקציה                                      | 142 |
| 9.  | משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי                          | 153 |
| 10. | כלל לופיטל                                                  | 160 |
| 11. | חקירת פונקציה                                               | 189 |
| 12. | חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות                             | 193 |
| 13. | מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה                           | 198 |
| 14. | בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)                        | 218 |
| 15. | משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב      | 224 |
| 16. | משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו               | 241 |
| 17. | טורי טיילור - מקלורן                                        | 256 |
| 18. | אינטגרלים מיידיים                                           | 261 |
| 19. | אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"                          | 263 |
| 20. | אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים                            | 267 |
| 21. | אינטגרלים בשיטת ההצבה                                       | 270 |
| 22. | אינטגרלים של פונקציות רציונליות                             | 275 |
| 23. | אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות                |     |

## תוכן העניינים

|     |                                                      |     |
|-----|------------------------------------------------------|-----|
| 24. | האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו    | 286 |
| 25. | שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)               | 310 |
| 26. | שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)              | 332 |
| 27. | המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים | 337 |
| 28. | אינטגרלים לא אמיתיים                                 | 345 |
| 29. | טורים עם איברים קבועים                               | 356 |
| 30. | תרגילים מתקדמים נוספים (הפרק באנגלית)                | 370 |

# חדו"א 1 מ

## פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

### תוכן העניינים

|    |                                           |
|----|-------------------------------------------|
| 1  | 1. מבוא לתורת הקבוצות                     |
| 7  | 2. המספרים האי-רציונליים                  |
| 8  | 3. קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות        |
| 15 | 4. קבוצה צפופה                            |
| 17 | 5. הערך השלם                              |
| 19 | 6. סימן הסכימה                            |
| 22 | 7. אינדוקציה                              |
| 24 | 8. אי שוויונים מפורסמים                   |
| 25 | 9. פתרון אי שוויונים                      |
| 27 | 10. עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון |
| 30 | 11. שדות                                  |



## מבוא לתורת הקבוצות

### שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $k$  ו- $n$  טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

(7) מצאו שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{6, 7, 8\}$ ,  $E = \{7, 8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$

(9) הוכיחו:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

**(10)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(11)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(12)** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את  $(A - B) - C$ .

ב. חשבו את  $A - (B - C)$ .

**(13)** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ ,  $A = \{12, 15, 18\}$ ,  $B = \{13, 15, 17\}$ 

הדגימו את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(14)** הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(15)** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**16** הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$                    | ב. $A \cup B$                    |
| ג. $A^c$                         | ד. $A \cap B^c$                  |
| ה. $A^c \cap B$                  | ו. $A \cup B^c$                  |
| ז. $A^c \cup B$                  | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ |                                  |

**17** ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו כי  $A \setminus B = A \cap B^c$ .  
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן:  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .  
הוכיחו כי  $X = Y$ .
- ג. נסמן:  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  
הוכיחו כי  $X = Y$ .

**18** תהיינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

- טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ .
- טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$ .
- טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$ .
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$ ?

**19** הוכיחו כי אם הנקודה  $x_1$  שייכת לסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ , אז קיימת סביבת  $\delta$  של  $x_1$  שמוכלת בסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ .

**20** הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

**21** הוכיחו כי אם  $x_0$  לא שייכת לקטע הסגור  $[a, b]$ , אז קיימת סביבה של הנקודה  $x_0$  אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע  $[a, b]$ .

**22** הוכיחו כי אם  $|x - x_0| < \varepsilon$ ,  $|y - y_0| < \varepsilon$ , אז  $|xy - x_0y_0| < \varepsilon(|x_0| + |y_0| + \varepsilon)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענו אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענו אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענו אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענו נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענו נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ . ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$ .  
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$ . ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ .
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים. ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ . ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$ .  
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ . ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$ .
- (5) הקבוצות  $A, B, C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$   $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$ . ב.  $E, D$ . ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $A \cap B = \{4, 6, 8\}$ ,  $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$
- (11)  $A \cup B = (-2, 4)$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$ ,  $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$ ,  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$
- (12)  $A \cup B = (-2, 4)$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$ ,  $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$ ,  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$

12) א.  $\phi$  ב.  $\{4, 5, 6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א.  $A^C = (-\infty, 1)$  ב.  $B^C = [1, 4]$  ג.  $C^C = [1, 4]$

ד.  $D^C = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענו ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

## המספרים האי-רציונליים

### שאלות

- (1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.  
ב. הוכיחו כי  $\sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.  
ב. הוכיחו כי  $\sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.  
ב. הוכיחו כי  $\sqrt[3]{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (4) הוכיחו כי  $\sqrt{n}$  הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- $n$  טבעי שאינו ריבוע של מספר).
- (5) הוכיחו או הפריכו:  
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.  
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.
- (6) א. הוכיחו כי  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
ב. הוכיחו כי  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
ג. הוכיחו כי  $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (7) א. יהי  $p$  מספר ראשוני ויהיו  $a, k$  מספרים טבעיים.  
הוכיחו כי  $p \mid a \Leftrightarrow p \mid a^k$ .  
ב. הוכיחו: אם  $n \neq N^k$ , אז  $\sqrt[k]{n}$  הוא מספר אי-רציונלי ( $n, k, N \in \mathbb{N}$ ).  
  
הערת סימון: אם מספר  $a$  מתחלק במספר  $b$  נסמן  $b \mid a$ ,  
ונאמר גם " $b$  מחלק את  $a$ ".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

### שאלות

(1) נתונה הקבוצה  $A = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

(2) נתונה הקבוצה  $A = \left\{ \frac{1}{n^4 + 2n + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

(3) נתונה הקבוצה  $A = \left\{ \frac{n^4 + n^2 + 3}{2n^4 + 2n^2 + 8} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

(4) נתונה הקבוצה  $A = \left\{ \frac{[cn]}{n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 < c \in \mathbb{R} \right\}$ .

- א. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצאו את  $\sup A$ .  
 ב. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמטה ומצאו את  $\inf A$ .

(5) נתונה הקבוצה  $A = \{n^5 - n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.



6 נתונה הקבוצה  $A = \{11 - 4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7 נתונה הקבוצה  $A = \left\{ \frac{4n-1}{5n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8 מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

א.  $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| \leq 1\}$

ג.  $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{(x-2)^2} \leq 0 \right\}$

ד.  $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \frac{n+1}{n+4} \sin \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

9 ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים  $S$ . הוכיחו שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.  
 ב. הוכיחו שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10 הוכיחו את הטענות הבאות:

- א. אם  $\alpha$  הוא הסופרמום של הקבוצה  $A$ , אז לכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$ , קיים איבר  $x \in A$ , כך ש-  $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ .  
 ב. אם  $\beta$  הוא האינפימום של הקבוצה  $A$ , אז לכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$ , קיים איבר  $x \in A$ , כך ש-  $\beta \leq x < \beta + \varepsilon$ .

**(11) הוכיחו את הטענות הבאות :**

- א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.  
(משפט הצפיפות של הממשיים)
- ב. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ , לא קיים מקסימום.
- ג. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, \infty)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $[a, \infty)$ , לא קיים מקסימום.
- ד. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ , הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.
- ה. אם  $S$  היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- $S$  יש חסם עליון, ומתקיים  $\max S = \sup S$ .

**(12) תהי  $A$  תת-קבוצה לא ריקה של  $\mathbb{R}$ , ויהי  $x \in \mathbb{R}$ .**

- נגדיר את המרחק בין  $x$  ל- $A$  על ידי:  $d(x, A) = \inf \{|x - a| \mid a \in A\}$ .
- אם  $\alpha \in \mathbb{R}$  הוא החסם העליון של  $A$ , הראו כי  $d(\alpha, A) = 0$ .

**(13) הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.****(14) הוכיחו שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.****(15) ענו על הסעיפים הבאים :**

- א. נניח ש- $K$  קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.  
נתבונן בקבוצה  $-K = \{-x \mid x \in K\}$ .  
הוכיחו שהקבוצה  $-K$  חסומה מלמעלה.
- ב. הוכיחו שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

**(16) תהי  $T$  קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.**

תהי  $S$  קבוצה חלקית לא ריקה של  $T$ .  
הוכיחו כי :

- א. ל- $T$  יש חסם עליון  $\sup T$ .
- ב. ל- $S$  יש חסם עליון  $\sup S$ .
- ג.  $\sup S \leq \sup T$ .
- ד. אם  $S$  ו- $T$  בעלות מקסימום, אז  $\max S \leq \max T$ .

- 17** יהיו  $A$  ו- $B$  שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.  
 א. נניח כי לכל  $x \in A$  קיים  $y \in B$  כך ש- $x < y$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A \leq \sup B$ .  
 האם יהיה נכון לומר ש- $\sup A < \sup B$ ?  
 ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל  $y \in B$  קיים  $x \in A$  כך ש- $y < x$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A = \sup B$ .
- 18** נניח ש- $A$  ו- $B$  הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,  
 כך ש- $\sup A = \inf B$ .  
 הוכיחו שלכל מספר  $\delta > 0$ , קיים מספר  $x$  ב- $A$ , ומספר  $y$  ב- $B$ , כך ש-  
 $x + \delta > y$ .
- 19** נניח ש- $A$  ו- $B$  הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,  
 כך ש- $\sup A \leq \inf B$ .  
 נניח שלכל מספר  $\delta > 0$  קיים מספר  $x$  ב- $A$ , ומספר  $y$  ב- $B$ , כך ש- $x + \delta > y$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A = \inf B$ .
- 20** נניח ש- $A$  קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום,  
 ונניח כי  $x < \sup A$ .  
 הוכיחו שיש לפחות שני איברים בקבוצה  $A$ , שנמצאים בין  $x$  ל- $\sup A$ .
- 21** תהי  $S$  קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.  
 הוכיחו כי אם  $c \geq 0$ , אז ל- $c \cdot S$  יש חסם עליון, ומתקיים  $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$ .
- 22** יהיו  $S$  ו- $T$  קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 הוכיחו כי הקבוצה  $S + T$  היא בעלת חסם עליון ומתקיים:  
 $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$ .
- 23** יהיו  $S$  ו- $T$  קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 א. הוכיחו כי הקבוצה  $S \cup T$  היא בעלת חסם עליון.  
 ב. הוכיחו כי  $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$ .
- 24** תהיינה  $U, T, S$  קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 נניח כי לכל  $s \in S$  ולכל  $t \in T$  קיים  $u \in U$ , המקיים את התנאי:  $u \geq s + t$ .  
 הוכיחו כי  $\sup U \geq \sup T + \sup S$ .

**(25) הוכיחו את הטענות הבאות :**

- א. אם  $S$  ו- $T$  הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, כך שכל איבר של  $S$  אינו גדול משום איבר של  $T$ , אז קיימים  $\sup S, \inf T$ , ומתקיים:  $\sup S \leq \inf T$ .
- ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה  $S$  מתקיים:  $\inf S \leq \sup S$ . האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

**(26) ענו על הסעיפים הבאים :**

- א. נסחו והוכיחו את משפט ארכימדס.
- ב. נסחו והוכיחו את תכונת ארכימדס.
- ג. הוכיחו שלכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$  קיים מספר טבעי  $n$ , כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .
- ד. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים  $\alpha, \beta$ , המקיימים  $\alpha < \beta$ , קיים מספר טבעי  $n$ , כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$  וגם  $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$ .

**(27) תהי  $A$  תת-קבוצה לא ריקה של  $\mathbb{R}$  ויהי  $\alpha \in \mathbb{R}$  חסם מלעיל של  $A$ .**

- נניח שלכל  $n \in \mathbb{N}$  קיים  $a_n \in A$ , כך ש- $a_n > \alpha - \frac{1}{n}$ .
- הוכיחו כי  $\alpha$  הוא הסופרמום של  $A$ .

**(28) הוכיחו שלכל מס' ממשי  $c$  קיים מספר שלם יחיד  $m \in \mathbb{Z}$ , כך ש- $m \leq c < m+1$ . למספר  $m$  קוראים הערך השלם של  $c$ , ומסמנים  $m = [c]$ .****(29) יהיו  $a$  ו- $b$  שני מספרים ממשיים המקיימים  $|a-b| < \frac{1}{n}$ , לכל מספר טבעי  $n$ . הוכיחו כי  $a=b$ .****(30) ענו על הסעיפים הבאים :**

- א. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = [n, \infty)$ . הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .
- ב. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$ . הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$ .

**(31)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = [a_n, b_n]$ .

נניח כי  $I_{n+1} \subset I_n$  לכל  $n$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ .

ב. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .

ג. בסעיף ב' התקיים כי  $I_{n+1} \subset I_n$  לכל  $n$ , וכן  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

**(32)** לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\min A = \inf A = 0, \sup A = 1$
- (2) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\max A = \sup A = \frac{1}{4}, \inf A = 0$
- (3) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\min A = \inf A = \frac{5}{12}, \sup A = \frac{1}{2}$
- (4) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\sup A = c, \inf A = [c]$
- (5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב.  $\min A = 4$
- (6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.  
ב.  $\max A = 7$
- (7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי  $\frac{4}{5}$ , וחסומה מלמטה על ידי  $\frac{3}{5}$ ;  
לכן, הקבוצה חסומה. ב.  $\sup A = \frac{4}{5}, \min A = \frac{3}{5}$
- (8) א.  $\max A = \frac{5}{4}, \inf A = -1$  ב.  $\min B = 0, \max B = 2$   
ג.  $\min C = -2, \sup C = 2$  ד.  $\inf D = 0, \sup D = 2$

שאלות 9-32 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## קבוצה צפופה

## שאלות

- (1) הוכיחו שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (2) הוכיחו שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (3) הוכיחו שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (4) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{\sqrt{10}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (5) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (6) אפשר להגדיר קבוצה צפופה בממשיים גם כך:  
תת-קבוצה  $S$  של  $\mathbb{R}$  היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$ ), אם לכל  $x \in \mathbb{R}$  ולכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $s \in S$ , כך ש- $|s - x| < \varepsilon$ .  
הוכיחו שאם  $S$  תת-קבוצה של  $\mathbb{R}$  מקיימת את התכונה, שלכל  $a, b \in \mathbb{R}$  קיים  $s \in S$ , כך ש- $a < s < b$ , אז  $S$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (7) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{q\sqrt{10} \mid 0 < q \in \mathbb{Q}\}$  צפופה ב- $[0, 1]$ .
- (8) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע  $(1, \infty)$ .  
הוכיחו שהקבוצה  $B = \left\{ \frac{a}{n} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  צפופה בקטע  $(0, 1)$ .
- (9) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע  $[0, 1]$ .  
הוכיחו שהקבוצה  $B = \{na \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$  צפופה בקטע  $[0, \infty)$ .
- (10) הוכיחו שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 4, אינה צפופה בקטע  $I = [0, 1]$ .

**11)** תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע  $(1, \infty)$  וצפופה בו.

הוכיחו שהקבוצה  $C = \left\{ \frac{a}{n^2(a+1)} : a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  אינה צפופה בקטע  $[0, 1]$ .

**12)** תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע  $[0, 1]$ .

הוכיחו שהקבוצה  $C = \left\{ \frac{a+1}{n^2} : a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  אינה צפופה בקטע  $[0, 1]$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)



## הערך השלם

### שאלות

1 פתרו את המשוואות הבאות :

א.  $[x+4]=10$

ב.  $[x+4]=-10$

ג.  $[x+4]^2=100$

ד.  $[2x^2+1]=9$

ה.  $[x^2+x-1]=-2$

ו.  $[x^2-\ln x+e^x-x^5]=0.5$

2 פתרו את המשוואה  $[x+4]=2x+1$ .

3 פתרו את המשוואה  $[16x^2+7]=8x+6$ .

4 פתרו את המשוואה  $[x^2+x+4]=2x+6$ .

5 פתרו את המשוואות הבאות :

א.  $[|x-4|+x]=4x+4$

ב.  $[|x+1|-|x-1|]=x$

6 פתרו את המשוואה  $[4+[x+1]]=10$ .

7 הוכיחו כי לכל  $x$  ממשי ו- $m$  שלם מתקיים  $[x+m]=[x]+m$ .

8 פתרו את אי-השוויונים הבאים :

א.  $[x+4]<10$

ב.  $[x+4]>-10$

ג.  $[x+4]^2<100$

ד.  $[x+4]\leq 10$

9) פתרו את אי-השוויונים הבאים :

א.  $[x]^2 - 5[x] + 6 \leq 0$

ב.  $[x-1][x-2] + [x+10] > 3[x+2] + [2.44]$

10) הוכיחו כי לכל  $x$  ו- $y$  ממשיים מתקיים :

א.  $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$

ב.  $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$

### תשובות סופיות

1) א.  $6 \leq x < 7$     ב.  $-14 \leq x < -13$     ג.  $[6, 7) \cup [14, -13)$

ד.  $(-\sqrt{4.5}, -2] \cup [2, \sqrt{4.5})$     ה.  $-1 < x < 0$     ו.  $\emptyset$

2)  $x = 2.5, 3$

3)  $x = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$

4)  $x = -1, 2$

5) א.  $x = 0$     ב.  $x = 2, 0, -2$

6)  $5 \leq x < 6$

7) שאלת הוכחה.

8) א.  $x < 6$     ב.  $x > -14$     ג.  $-14 < x < 6$     ד.  $x < 7$

9) א.  $2 \leq x < 4$     ב.  $x < 1$  or  $x \geq 5$

10) שאלת הוכחה.

## סימן הסכימה

## שאלות

(1) כתבו בפירוט את הסכומים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \sum_{n=0}^{10} 4^n & \text{ב.} \sum_{k=1}^4 2k & \text{ג.} \sum_{n=4}^{10} na_n \\
 \text{ד.} \sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i & \text{ה.} \sum_{t=1}^8 tx^t & \text{ו.} \sum_{k=4}^{10} na_{k+1} \\
 \text{ז.} \sum_{k=1}^{10} 4n & \text{ח.} \sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1) & \text{ט.} \sum_{\ell=1}^3 (\ell^2 - x_{2\ell} - 4)
 \end{array}$$

(2) כתבו את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה :

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} 1+2+4+8+16+32+64+128 & \text{ב.} 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 \\
 \text{ג.} 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 & \text{ד.} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 \\
 \text{ה.} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 43 \cdot 44 & \text{ו.} 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8 \\
 \text{ז.} 5^2 + 7^2 + \dots + 27^2 & \text{ח.} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} \\
 \text{ט.} \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243} & \text{י.} 4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625}
 \end{array}$$

(3) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \sum_{k=1}^{10} 4k & \text{ב.} \sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2) & \text{ג.} \sum_{k=10}^{24} k(k-1) \\
 \text{ד.} \sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1} & \text{ה.} \sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2) & \text{ו.} \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2)
 \end{array}$$

\* תוכלו להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה') :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

(4) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכלו להיעזר בנוסחה הבאה : } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$$

$$\text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2$$

$$\text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכיחו כי :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשבו את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום :

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$$

$$\text{ב. } 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$\text{ג. } 4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$$

$$\text{ד. } 4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$$

$$\text{ה. } 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$$

$$\text{ו. } na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$$

$$\text{ז. } 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$$

$$\text{ח. } ((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$$

$$\text{ט. } (1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$$

$$(2) \quad \text{א. } \sum_{k=0}^7 2^k \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{10} 2k \quad \text{ג. } \sum_{k=0}^9 (2k+1) \quad \text{ד. } \sum_{k=1}^7 k(k+1)$$

$$\text{ה. } \sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k \quad \text{ו. } \sum_{k=1}^7 3k(k+1) \quad \text{ז. } \sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$$

$$\text{ח. } \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{ט. } \sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k} \quad \text{י. } \sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$$

$$(3) \quad \text{א. } 220 \quad \text{ב. } 1650 \quad \text{ג. } 4360$$

$$\text{ד. } 4360 \quad \text{ה. } 28 \quad \text{ו. } 4545$$

$$(4) \quad \text{א. } 5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3} (4^{20} - 1) \quad \text{ב. } 32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$$

$$\text{ג. } 2^{10} \left[ \frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$$

$$(5) \quad \text{א. } 2870 \quad \text{ב. } 4886 \quad \text{ג. } 2024 \quad \text{ד. } 969$$

$$(6) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(7) \quad \text{א. } 8 \cdot 9 + 6 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + \frac{8(8+1)(2 \cdot 8 + 1)}{6} \quad \text{ב. } 4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$$

## אינדוקציה

## שאלות

(1) הוכיחו באינדוקציה כי  $4 \cdot 10^n + 14 \cdot 19^n$  מתחלק ב-9 לכל  $n$  טבעי.

(2) הוכיחו באינדוקציה כי  $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$  ( $k, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ ).

(3) מצאו את ה- $n$  הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים  $2^n \geq n^2$ , והוכיחו באינדוקציה שעבור כל  $n$  טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

(4) הוכיחו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , לכל  $n$  טבעי ולכל  $x \geq -1$  ממשי.  
הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכיחו כי  $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ , לכל  $n$  טבעי.  
רמז: היעזרו בתוצאת סעיף א'.

(5) הוכיחו באינדוקציה כי  $(1-x)^n < \frac{1}{1+xn}$  לכל  $0 < x < 1, n \in \mathbb{N}$ .

(6) הוכיחו באינדוקציה כי  $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ , לכל  $n \in \mathbb{N}$ .  
רמז: היעזרו במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

(7) נתון כי  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, a_1 = \sqrt{2}$ .

הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי מתקיים:

א.  $a_n \leq 2$

ב.  $a_n \leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

(8) הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי,

אם  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, a_1 = -1, a_2 = 0$ ,

אז  $a_n = n^2 - 2n$ .

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

**(9)** הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי,

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

$$\text{אז } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n.$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

**(10)** הוכיחו באינדוקציה כי  $4^n - 1$  מתחלק ב-15, לכל  $n$  טבעי זוגי.

$$\textbf{(11)}$$

הוכיחו באינדוקציה כי  $(n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

**הערה:** תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים"

בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## אי שוויונים מפורסמים

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים  $x, y$  המקיימים  $x < 1, y > 1$ ,

$$x + y > xy + 1.$$

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי:

$$\text{אם } a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1, \text{ אז } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \quad (0 < a_i \in \mathbb{R}).$$

(2) נסחו והוכיחו את אי שוויון הממוצעים.

(3) הוכיחו שלכל  $a, b \in \mathbb{R}$  מתקיים:

$$\text{א. } |a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{אי שוויון המשולש})$$

$$\text{ב. } |a - b| \leq |a| + |b|$$

$$\text{ג. } |a - b| \geq |b| - |a|, \quad |a - b| \geq |a| - |b|$$

$$\text{ד. } |a - b| \geq ||a| - |b||$$

$$\text{ה. } |a + b| \geq ||a| - |b||$$

$$\text{ו. } (a_i \in \mathbb{R}) \quad |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את אי שוויון קושי-שוורץ.

$$\text{ב. הוכיחו כי אם } a_1 + \dots + a_n = 1 \text{ אז } a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}).$$

הערה: אי שוויון ברנולי מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".

נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)



## פתרון אי שוויונים

### שאלות

פתרו את אי השוויונים הבאים :

$$(1) \quad x^2 - 12x > -32$$

$$(2) \quad (x-3)(x-7) \geq 8x-56$$

$$(3) \quad 2x^2 + 2x + 24 \geq 0$$

$$(4) \quad \frac{x-1}{x^2-9} > 0$$

$$(5) \quad \frac{2x-1}{x-5} \leq 0$$

$$(6) \quad \frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$$

$$(7) \quad |x+2| < 3$$

$$(8) \quad |6-2x| < x$$

$$(9) \quad |2x+3| < 8 < |5-x|$$

$$(10) \quad x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$$

$$(11) \quad |2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$$

$$(12) \quad \sqrt{x+3} < 7$$

$$(13) \quad \frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$$

$$(14) \quad \sqrt{x^2+x-6} < x-3$$

הערה : לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

## תשובות סופיות

(1)  $x < 4$  או  $x > 8$

(2)  $x \leq 7$  או  $x \geq 11$

(3) כל  $x$

(4)  $x > 3$  או  $-3 < x < 1$

(5)  $\frac{1}{2} \leq x < 5$

(6)  $1 \leq x \leq 6$

(7)  $-5 < x < -1$

(8)  $2 < x < 6$

(9)  $-5\frac{1}{2} < x < -3$

(10)  $x < -5$  או  $x > 7$

(11)  $x < -1$  או  $x > 4$

(12)  $-3 \leq x < 46$

(13)  $x < 0.472$

(14) אין פתרון.

## עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

### שאלות

1 חשבו, ללא מחשבון:

א.  $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב.  $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

2 הוכיחו את הזהויות הבאות:

א.  $(n-2)!(n^2 - n) = n!$

ב.  $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג.  $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2 - 2}{(n+1)!}$

3 חשבו:

א.  $\binom{5}{3}$       ב.  $\binom{4}{1}$       ג.  $\binom{10}{0}$       ד.  $\binom{14}{11}$

4 הוכיחו את הזהויות הבאות:

א.  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$       ב.  $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$       ג.  $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

5 הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$$

6 רשמו את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א.  $(a+b)^4$       ב.  $(x+2)^5$       ג.  $(x-4)^3$

7 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו  $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$  לכל  $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$

ב. נסחו והוכיחו (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

8) הוכיחו שלכל  $n \geq 1$  טבעי מתקיים:

א.  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

ב.  $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

ג.  $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$

9) מצאו את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום  $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$ .

10) בפיתוח של  $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a}\right)^{12}$ , ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא  $a^7$ . מצאו את מקום האיבר ואת ערכו.

11) מצאו, בפיתוח של  $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$ , איבר שאינו מכיל את  $x$ , וחשבו את ערכו.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו, בפיתוח של  $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ , את המקדם של  $\frac{1}{x}$ .

ב. חשבו את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם  $a = b = 1$ .

13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום  $(a+b)^n$ , הוא 15. מצאו את  $n$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } \frac{1}{30} \quad \text{ב. } \frac{1001}{285}$$

(2) שאלת הוכחה.

$$(3) \quad \text{א. } 10 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 1 \quad \text{ד. } 364$$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

$$(6) \quad \text{א. } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{ב. } (x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$\text{ג. } (x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

$$(9) \quad T_4 = \frac{15}{2a}$$

$$(10) \quad T_7 = 924a^7$$

$$(11) \quad T_9 = 45$$

$$(12) \quad \text{א. } \frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6} \quad \text{ב. } 2^{18}$$

$$(13) \quad n = 6$$

## שדות

## שאלות

- 1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ( $\oplus$ ) וכפל ( $\otimes$ ) על  $R$ .  
בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. 
$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y + 4 \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned}$$

ב. 
$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned}$$

ג. 
$$\begin{aligned} x \oplus y &= y \\ x \otimes y &= y^2 \end{aligned}$$

2) נתונה הקבוצה  $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ .

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה  $Q[\sqrt{2}]$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

- 3) ענו על הסעיפים הבאים:

- הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
- הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
- הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
- הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

- 4) יהיו  $a, b$  איברים בשדה.

- הוכיחו כי  $a + a = a \Leftrightarrow a = 0$ .
- הוכיחו כי  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .
- הוכיחו כי  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ .

5) יהיו  $a$  ו- $b$  איברים של שדה.  
הוכיחו כי:

א.  $(-1) \cdot a = -a$

ב.  $(-a)b = a(-b) = -ab$

6) הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.  
כלומר, הוכיחו כי  $a = c \Rightarrow ab = cb$ , לכל  $a, b, c$ , בשדה  $(b \neq 0)$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חדו"א 1 מ

## פרק 2 - סדרות

### תוכן העניינים

|                                                |           |
|------------------------------------------------|-----------|
| 1. היכרות עם סדרות                             | (ללא ספר) |
| 2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות            | 32        |
| 3. חישוב גבול לפי אוילר                        | 34        |
| 4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ                 | 35        |
| 5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש        | 38        |
| 6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית                | 39        |
| 7. חישוב גבול לפי ההגדרה                       | 41        |
| 8. שלילת הגדרת הגבול של סדרה                   | 43        |
| 9. הגדרת הגבול לפי היינה                       | 46        |
| 10. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס | 48        |
| 11. משפט שטולץ                                 | 53        |
| 12. מבחן קושי להתכנסות סדרות                   | 55        |
| 13. שאלות הוכח או הפרך                         | 57        |



## חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n}$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}$
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^2 + 10n}$
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n}$
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right)$
- (6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$
- (7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}}$
- (8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}}$
- (9)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}}$
- (10)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}}$
- (11)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}}$
- (12)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right)$
- (13)  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}}$
- (14)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$
- (15)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$
- (16)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n)$
- (17)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$
- (18)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2)$
- (19)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn})$
- (20)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \left( \frac{4}{n} \right)$
- (21)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1}$
- (22)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1}$
- (23)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin \frac{1}{n}$
- (24)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

\* רמז לשאלה 24:  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

### הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה  $n$  – המשתנה  $x$ . יש להתייחס אל  $x$  כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

## תשובות סופיות

- |                                                                                                          |                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 4 (2                                                                                                     | 0 (1                  |
| 0 (4                                                                                                     | $\infty$ (3           |
| 1 (6                                                                                                     | -5 (5                 |
| $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (8                                                                       | 1.5 (7                |
| 4 (10                                                                                                    | 0.25 (9               |
| $\ln 3$ (12                                                                                              | 2 (11                 |
|                                                                                                          | $e^{\frac{1}{3}}$ (13 |
| (14 $(\lim a_n = \infty) \Leftarrow (a > 0, b = 0)$ , $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftarrow (b \neq 0)$ |                       |
| $(\lim a_n = -\infty) \Leftarrow (a < 0, b = 0)$                                                         |                       |
| $\frac{k}{2}$ (16                                                                                        | 2.5 (15               |
| 0.5 (18                                                                                                  | 0.5 (17               |
| 4 (20                                                                                                    | $\frac{a-b}{2}$ (19   |
| $\frac{1}{3}$ (22                                                                                        | 0.5 (21               |
| 1 (24                                                                                                    | $\infty$ (23          |

## חישוב גבול לפי אוילר

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

$$e \quad (8)$$

## חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

## שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (10)$$

רמז לשאלה 9: הוכיחו כי  $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ .

11) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

$$א. a_n = \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \dots \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right)$$

$$ב. a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

12) יהי  $x$  מספר ממשי וחיובי.

$$נתבונן בסדרה:  $a_n = \frac{6n + \sqrt{\lfloor x^2 n^2 \rfloor}}{3n + \sqrt{2}}$$$

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$$

$$13) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$

$$14) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3\sqrt{k}}}$$

(15) חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+3}^{2n+4} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + k\sqrt{n}}}$

(16) חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{2n^2 + 3n + 5}{\sqrt[3]{5n^{12} + 2k^5 + k^3 + 1}}$

(17) חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \sqrt{k} \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$

(18) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית, המקיימת  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$  לכל  $n$  טבעי.

הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

## תשובות סופיות

- (1) 4  
 (2) 0  
 (3) 0  
 (4) 0.75  
 (5) 3  
 (6)  $\frac{3}{4}$   
 (7) 0  
 (8) 16  
 (9) 0  
 (10) 1  
 (11) שאלת הוכחה.  
 (12) שאלת הוכחה.  
 (13) 9  
 (14) 1  
 (15)  $\frac{1}{2}$   
 (16)  $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$   
 (17) 1  
 (18) שאלת הוכחה.

## חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4e} \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\infty \quad (5)$$

## חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

### שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, \quad a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 2 \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{יהיו } a > 0 \text{ ו- } x_1 > 0.$$

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ , לכל  $n$ .  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$ .

$$(5) \quad \text{יהי } x_1 = a \geq 0.$$

נגדיר סדרה  $x_n$  ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6)$ , לכל  $n$ .

- א. מצאו את כל הערכים של הקבוע  $a$ , עבורם הסדרה עולה/יורדת.  
ב. קבעו האם הסדרה  $x_n$  מתכנסת עבור  $3 < a < 3.5$ .

$$(6) \quad \text{יהיו } 0 < b_1 < a_1$$

נגדיר  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ,  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ , לכל  $n$ .

הוכיחו שהסדרות  $a_n$  ו- $b_n$  מתכנסות ומתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .



(7) נתונה הסדרה  $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ .

א.1. נגדיר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי  $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ .

הניחו שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים. בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה  $a_n$  שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה  $a_n$  (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$  קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

## תשובות סופיות

(1) הגבול הוא 2.

(2) הגבול הוא 1.

(3) הגבול הוא 1.

(4) הגבול הוא  $\sqrt{a}$ .

(5) א. אם  $2 \leq a \leq 3$  הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

(7) ב.1.  $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$ .

## חישוב גבול לפי ההגדרה

## שאלות

בשאלות 1-7 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad (7)$$

(8) נתון כי הסדרה  $(a_n)$  מתכנסת.  
הוכיחו שגבולה הוא יחיד.

(9) נתון כי  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ .

הוכיחו לפי ההגדרה, כי :

$$(a_n + b_n) \rightarrow a + b \quad \text{א.}$$

$$(a_n \cdot b_n) \rightarrow a \cdot b \quad \text{ב.}$$

בשאלות 10-14 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (11) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (13) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (14)$$

(15) הוכיחו שהסדרה  $1, 101, 2, 102, 3, 103, 4, 104, \dots$  שואפת לאינסוף.

(16) הוכיחו שהסדרה  $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$  שואפת לאינסוף.

(17) הוכיחו שהסדרה  $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n, \dots$  לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

(18) הוכיחו או הפריכו :

א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

ב.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## שלילת הגדרת הגבול של סדרה

### שאלות

- (1) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאתם.

א.  $1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots$

ב.  $1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, \dots$

ג.  $1, 0, -4, 1, 0, 4, 1, 0, -4, 1, 0, 4, \dots$

- (2) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאתם.

א.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{1}{8}, \dots$

ב.  $\frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{5}{6}, \frac{11}{7}, \frac{7}{8}, \frac{15}{9}, \frac{9}{10}, \dots$

ג.  $a_n = \frac{(-1)^n n + 4}{n + 1}$

בשאלות 3-6 הוכיחו לפי ההגדרה כי:

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+10}{4n+2} \neq \frac{1}{2}$

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 1}{2n^2 + 2} \neq 1$

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{2n^2 + n + 2} \neq \frac{9}{4}$

(6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \neq 1$

- (7) בסעיפים א-ב הוכיחו לפי ההגדרה כי:

א. לסדרה  $a_n = (-1)^n$  לא קיים גבול.

ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה  $a_n = (-1)^n$ .

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכיחו שלסדרה  $b_n = (-1)^n \frac{3n+4}{n-5}$  לא קיים גבול.

(8) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$  מתבדרת.

(9) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots$  מתבדרת.

(10) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה  $0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$  לא קיים גבול.

(11) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \frac{n}{2} - \left[ \frac{n}{2} \right]$  מתבדרת.

(12) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \frac{n}{10} - \left[ \frac{n}{10} \right]$  מתבדרת.

(13) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+1} & n \text{ even} \\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd} \end{cases}$  מתבדרת.

(14) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \dots$  מתבדרת.

(15) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה  $a_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+2}$  אין גבול.

(16) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$  מתבדרת.

הדרכה: הוכיחו קודם את סדרת הטענות הבאה:

$$1. \quad \sqrt{m^2} - [\sqrt{m^2}] = 0 \text{ לכל } m \text{ טבעי.}$$

$$2. \quad \sqrt{m^2 - 1} > m - \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$3. \quad [\sqrt{m^2 - 1}] = m - 1 \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$4. \quad \sqrt{m^2 - 1} - [\sqrt{m^2 - 1}] \geq \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

(17) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 10}$  לא שואפת ל- $\infty$ .

(18) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $0, 1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, \dots$  לא שואפת ל- $\infty$ .

(19) נתונה הסדרה  $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, \dots$ .

הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה

א. לא שואפת ל- $\infty$ .

ב. לא שואפת ל- $-\infty$ .

(20) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = n\sqrt{10} + (-1)^n \lceil n\sqrt{10} \rceil$  לא שואפת ל- $\infty$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## הגדרת הגבול לפי היינה

## שאלות

(1) הוכיחו כי :

- א.  $\sin(2n\pi) = 0$       ב.  $\cos(2n\pi) = 1$
- ג.  $\sin((2n+0.5)\pi) = 1$       ד.  $\cos((2n+0.5)\pi) = 0$
- ה.  $\sin((2n+1)\pi) = 0$       ו.  $\cos((2n+1)\pi) = -1$
- ז.  $\sin((2n+1.5)\pi) = -1$       ח.  $\cos((2n+1.5)\pi) = 0$
- ט.  $\sin(n\pi) = 0$       י.  $\cos(n\pi) = (-1)^n$
- יא.  $\sin((n+0.5)\pi) = (-1)^n$       יב.  $\cos((n+0.5)\pi) = 0$

הוכיחו כי הגבולות בשאלות 2-9 אינם קיימים לפי היינה :

- (2)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|x-4|}$       (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 4}{\cos x + 10}$
- (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$       (5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-[x]}$
- (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+4^{[10x]}}$       (7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] \cdot \sin x}{x}$
- (8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - [\sin x]}$       (9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(4 + [\arctan x])$
- (10) נתון כי  $f(x) = 2^{\left[\frac{x}{2}\right]}$

א. הוכיחו כי הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$  אינו קיים לפי היינה.ב. חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$  לפי היינה.ג. תנו דוגמה לסדרה חיובית  $a_n$ , כך ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  אינו קיים אך  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  קיים.(11) הוכיחו כי הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x}\} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - [\sqrt{x}])$  אינו קיים לפי היינה.רמז: הוכיחו ראשית כי לכל  $n$  טבעי מתקיים  $[n^2 - 1] = n - 1$ .

**תשובות סופיות**

10) ב.  $\sqrt{2}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)



## תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

### שאלות

- (1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.  
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,  
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{3n} + (-3)^n + 2}$$

ב. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{2n} + (-3)^n + 2}$$

ג. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - 1 \right)^n$$

- (2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.  
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,  
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n \right)$$

ב. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lfloor 4n \rfloor - 4 \lfloor n \rfloor)$$

ג. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{4} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$$

- (3) נתון ש-  $(a_n)$  סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.  
א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

ב. הוכיחו כי  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n}$ .

- (4) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול:  $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ .

(5) חשבו את הגבול הבא 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n$$

(6) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול:  $a_1 = 2$ ;  $a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}$ .

(7) נתונה הסדרה  $a_n$ , המוגדרת על ידי  $a_1 = 2$ ;  $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ .

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(8) נתונה הסדרה  $a_n$ , המוגדרת על ידי  $a_1 = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ );  $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$ .

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

- (9) א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.  
ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

(10) נתונה סדרה  $a_n = \sin \frac{\pi}{4} n$ .

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(11) נתונה סדרה  $a_n = n \sin \frac{\pi}{4} n$ .

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(12) נתונה סדרה  $a_n = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ .

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(13) נתונה סדרה  $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ .

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(14) נתונה סדרה  $a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n^{40}} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{4}\right)$ .

מצאו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(15) נתונה סדרה  $a_n$ , ונגדיר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי  $b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$ .  
הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

(16) תהי  $a_n$  סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.

הוכיחו שלכל  $N \in \mathbb{N}$  קיימים  $m, n \in \mathbb{N}$ , כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$ .

(17) נתונה סדרה  $a_n$ .

$a_{n_k}$  ו- $a_{m_k}$  שתי תת-סדרות של  $a_n$  המקיימות:

$$1. a_{n_k} \rightarrow L, a_{m_k} \rightarrow L.$$

2. כל איברי הסדרה  $a_n$  מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו:  $a_n \rightarrow L$ .

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות 4-5.

$$(18) \text{ נתונה סדרה חיובית } a_n \text{ המקיימת } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

(19) פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה  $a_n$ ,  $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$

הערה:  $\sup a_n$  הוא החסם העליון של הקבוצה  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

ב. מצאו סדרה  $a_n$  שעבורה  $\inf a_n < \liminf a_n < \limsup a_n < \sup a_n$ .

(20) הוכיחו שהסדרה  $a_n$  מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם  $\liminf a_n = \limsup a_n$ .

(21) הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות  $a_n, b_n$  מתקיים

$$א. \lim(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

$$ב. \liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$$

(22) נתונות שתי סדרות חסומות  $a_n$  ו- $b_n$ .

קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.

א. ייתכן שמתקיים  $\lim(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n$ .

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

(23) יהיו  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות חסומות.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

הוכיחו כי

(24) תהי  $(a_n)$  סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} a_n) = 1$ .

א. הוכיחו שאם  $(a_n)$  מתכנסת, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

ב. הוכיחו שאם  $L > 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ ,

אז גם  $\frac{1}{L}$  הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L = 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L = 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

(25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות,  $(a_n)$  ו- $(b_n)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

המקיימות

ב. יהיו  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  שתי סדרות, המקיימות  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$ .

הוכיחו שאם לכל  $n$  מתקיים  $0 \leq a_n, b_n \leq 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ .

(26) תהי  $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ .

א. הוכיחו כי הסדרה  $(a_n)$  חסומה.

ב. מצאו את  $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל  $n$  מתקיים  $\langle \sqrt{n^2 - 1} \rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$ .

ד. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)) = 1$ .

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L = 1$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

ו. מצאו את  $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ואת  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מקסימום.

27) תהי  $(a_n) = (n - \sqrt{n} \lceil \sqrt{n} \rceil)$ .

- א. הוכיחו כי הסדרה  $(a_n)$  חסומה מלרע.
- ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .
- ג. מצאו את  $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ואת  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מינימום.
- ד. יהי  $\ell$  מספר טבעי. הוכיחו שכמעט לכל  $n$ , מתקיים  $n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n+1$ .
- ה. יהי  $\ell$  מספר טבעי. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$ .
- ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .
- ז. האם  $(a_n)$  חסומה מלעיל?
- ח. חשבו את  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- ט. מצאו את  $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , וקבעו האם לקבוצה  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מקסימום.

## תשובות סופיות

- 1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.  
 ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.  
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם  $\pm \frac{1}{e}$ .
- 2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, -1.  
 ב. הגבול של הסדרה הוא 0.  
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, 0.25, 0.5, 0.75.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט שטולץ

## שאלות

$$(1) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

$$(2) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n+1)}{n^3}$$

$$(3) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \text{ כאשר } p \text{ קבע שלם וחיובי.}$$

$$(4) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + \dots + n \cdot c_n}{n^3}, \text{ אם ידוע כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = k$$

$$(5) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^2 \cdot a] + [2^2 \cdot a] + \dots + [n^2 \cdot a]}{n^3}, \text{ כאשר } a \text{ קבוע ממשי.}$$

$$(6) \text{ נתון כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכיחו כי:

א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$  (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- $L$ ).

ב.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$  (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- $L$ ).

ג.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$  (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- $L$ ).

\* הערה: בסעיף ב' הניחו כי  $L \neq 0$ , ובסעיף ג' הניחו כי  $a_n > 0$  לכל  $n$ .

## תשובות סופיות

(1) 1

(2)  $\frac{2}{3}$

(3)  $\frac{1}{p+1}$

(4)  $\frac{k}{3}$

(5)  $\frac{a}{3}$

(6) שאלת הוכחה.

## מבחן קושי להתכנסות סדרות

### שאלות

(1) הסדרה  $a_n$  מקיימת  $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$  לכל  $n$ . הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(2) הוכיחו שהסדרה  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$  שואפת לאינסוף.

(3) הוכיחו כי הסדרה  $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  מתכנסת.

(4) הסדרה  $a_n$  מקיימת  $|a_n - a_{n-1}| < a^n$  לכל  $n$ , כאשר  $0 < a < 1$ . הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(5) הוכיחו כי הסדרה  $a_n = \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$  מתכנסת.

(6) סדרה  $x_n$  מקיימת  $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k|x_{n+1} - x_n|$  לכל  $n$ , כאשר  $0 < k < 1$ . הוכיחו שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

(7) נתונה סדרה  $x_n$  המוגדרת על ידי  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ . הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

(8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהסדרה  $x_n$  מתכנסת.

א.  $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$

ב.  $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n^2}$

ג.  $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$



(9) נגדיר סדרה  $x_n$  על ידי  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$ .

הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

(10) סדרה  $x_n$  מקיימת  $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}$  לכל  $n$  טבעי, ו-  $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$ .  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: הוכיחו ראשית שלכל  $n$  טבעי מתקיים  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1}{2}$ .

(11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה  $x_n$ .

אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ , אז  $x_n$  מתכנסת.

ב. אם לכל  $n$  מתקיים  $|x_{n+2} - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|$ , אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת.

ג. אם סדרה  $x_n$  מקיימת את תנאי קושי, אז קיים  $0 < \alpha < 1$  כך שלכל  $n$  טבעי:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

הערה

בשאלות 7-10 מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחנו בשאלה 6.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## שאלות הוכיחו או הפריכו

### הערת ניסוח

הניסוחים הבאים שקולים :

- א. קיים  $N$  טבעי כך שלכל  $n > N$  מתקיימת הטענה  $X$ .  
 ב. כמעט לכל  $n$  מתקיימת הטענה  $X$ .  
 ג. לכל  $n$ , פרט למספר סופי של  $n$ -ים, מתקיימת הטענה  $X$ .

### שאלות

בשאלות 1-13 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה :

- (1) אם  $a_n$  סדרה חסומה, אז יש לה גבול.
- (2) אם  $b_n$  סדרה לא חסומה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ .
- (3) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$ .
- (4) אם  $d_n$  סדרה עולה, אז היא לא חסומה.
- (5) אם ל- $a_n$  ו- $b_n$  אין גבול, אז גם ל- $(a_n + b_n)$  וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$  אין גבול.
- (6) אם ל- $a_n$  ו- $b_n$  אין גבול, אז גם ל- $(a_n / b_n)$  אין גבול.
- (7) אם  $a_n$  מתכנסת ו- $b_n$  מתבדרת, אז  $(a_n \cdot b_n)$  מתבדרת.
- (8) אם  $a_n$  מתכנסת ו- $b_n$  מתבדרת, אז  $(a_n \cdot b_n)$  מתכנסת.
- (9) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$ .
- (10) אם  $a_n < b_n$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

$$(11) \text{ אם } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ וגם } b_n \text{ חסומה, אז } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty.$$

$$(12) \text{ אם } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \text{ וגם } a_n < 1 \text{ לכל } n, \text{ אז } k < 1.$$

$$(13) \text{ אם } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \text{ אז } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1.$$

(14) הוכיחו או הפריכו :

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם  $a_n$  ו- $b_n$  ( $b_n \neq 0$ ) סדרות חסומות, אז גם הסדרה  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$  חסומה.

ג. אם  $a_n$  סדרה עולה, אז גם הסדרה  $b_n = (a_n)^2$  עולה.

ד. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$ , אז הסדרה  $a_n$  חסומה.

ה. אם  $a_n$  ו- $b_n$  סדרות חסומות, אז גם הסדרה  $c_n = \frac{1}{2^{a_n}} (b_n^2 + 2b_n)$  חסומה.

ו. אם  $a_n$  סדרה מתכנסת ו- $b_n$  ( $b_n \neq 0$ ) סדרה חסומה, אז לסדרה  $(a_n b_n^2)$  יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם  $a_n$  סדרה מתכנסת, אז קיים  $N$  טבעי, כך שלכל  $n > N$  מתקיים

$$\left| \frac{a_n}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות 15-18 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה :

(15) אם לכל  $n$  מתקיים:  $a_{n+1} < a_n^2$ ,  $a_n \in (0,1)$ , אז הסדרה  $a_n$  מתכנסת.

$$(16) \text{ הסדרה } a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\dots+(-1)^{n-1}n}{n} \text{ מתבדרת.}$$

(17) אם לכל  $n$  מתקיים:  $4x_n(1-x_{n+1}) > 1$ ,  $x_n \in (0,1)$ , אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$ .

(18) לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.

(19) הוכיחו או הפריכו :

א. אם הסדרה  $(x_n + \frac{1}{n} x_n)$  מתכנסת, אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת.ב. אם הסדרה  $(x_n^2 + \frac{1}{n} x_n)$  מתכנסת, אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת.(20) סדרה של מספרים שלמים המקיימת  $x_{n+1} \neq x_n$  לכל  $n$ .

הוכיחו או הפריכו :

א. הסדרה  $x_n$  לא מקיימת את תנאי קושי.ב. לסדרה  $x_n$  לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

(21) הוכיחו או הפריכו :

א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  ו- $a < b$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n < b_n$ .ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  וכמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n \leq b_n$ , אז  $a \leq b$ .(22) תהי  $(a_n)$  סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכיחו או הפריכו :

א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n = 0$ .ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n \geq 0$ .ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n \neq 0$ .ד. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n > 0$ .

(23) הוכיחו או הפריכו :

א. אם  $(a_n)$  סדרה מתכנסת ואם  $a_n \leq k$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$ .ב. אם  $(a_n)$  סדרה מתכנסת ואם  $a_n < k$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$ .(24) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית, המקיימת  $a_{n+1} \leq \frac{a_n - a_n^2}{2}$  לכל  $n$ .הוכיחו או הפריכו :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(25) הוכיחו או הפריכו :

אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = 0$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**(26)** נתונות שתי סדרות  $(a_n)$  ו- $(b_n)$ , שעבורן:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 4$ .

הוכיחו או הפריכו:

א.  $a_n \rightarrow 2$ ,  $b_n \rightarrow 0$  או  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 2$ .

ב.  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

**(27)** נניח שסדרה  $a_n$  מקיימת  $a_{2n-2} \leq a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$  לכל  $n$  טבעי.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $a_n$  עולה.

ב.  $a_n$  יורדת.

ג.  $a_n$  מתכנסת.

ד.  $a_n$  לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה התשובה, אם נתון כי  $a_n$  מקיימת  $a_{2n-2} < a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n-1}$  לכל  $n$  טבעי?

**(28)** הסדרה  $(a_n)$  מקיימת את התכונה הבאה:

$$0 \leq a_{m+n} \leq \frac{1}{2}(a_m + a_n) \text{ לכל } m, n \text{ טבעיים.}$$

הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .

**(29)** א. תהי  $(a_n)$  סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ .

הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ב. תהיינה  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$ .

הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**(30)** נתונה הסדרה  $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ .

הוכיחו או הפריכו:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ-3.

רמז: לכל  $x \geq 0$  מתקיים  $\ln(1+x) \leq x$ .

בשאלות 31-34 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,  
 כאשר ידוע כי  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך שמתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$ .

31) אם כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

32) אם כמעט כל איברי  $(b_n)$  חיוביים, אז גם כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים.

33) א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ .

ב. קיים  $N > 0$ , כך שלכל  $n > N$ , מתקיים  $b_n \neq 0$ .

ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

34) א. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $b_n < a_n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

ב. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $0 < b_n < a_n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

בשאלות 35-38 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,  
 כאשר ידוע כי  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך שמתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 1$ .

35) א. אם כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים, אז כמעט כל איברי  $(b_n)$  חיוביים.

ב. אם  $(a_n)$  חיובית, אז קיים  $N > 0$ , כך ש- $b_n > \frac{1}{2a_n}$  לכל  $n > N$ .

36) אם  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  חיוביות, אז  $(a_n)$  מתכנסת או  $(b_n)$  מתכנסת.

37) א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

ג. אם  $(a_n)$  חיובית ואפסה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

38) א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$ .

\* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.

ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 1$ .

בשאלות 39-42 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,  
 כאשר ידוע כי  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך שמתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$ .

(39) א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

ב. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $a_n > 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

ג. אם קיימים אינסוף ערכי  $n$ , כך ש- $a_n > 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

ד. קיים  $N > 0$ , כך שלכל  $n > N$ , מתקיים  $b_n \neq 0$ .

(40) א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ב. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $0 < b_n < a_n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

(41) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ , אז קיים  $N$  טבעי, כך שלכל  $n > N$  מתקיים  $a_n < \frac{1}{3}$ .

(42) א. אם כמעט כל איברי  $(b_n)$  חיוביים, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$ .

ב. אם קיים קבוע  $c > 0$ , כך ש- $b_n \geq c$  כמעט לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(43) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ .

ב. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 4$ .

ג. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \infty$ .

ד. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$  לא קיים.

(44) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ .

ב. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$ .

ג. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ .

ד. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  לא קיים.

(45) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n |a_n - a_{n+1}| = \infty$ .

ב. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (a_n - a_{n+1}) = \infty$ .

(46) נתונה סדרה חיובית  $(a_n)$ .

הוכיחו או הפריכו :

א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ .

ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ .

הערה : תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא :  
כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

(47) נתונה סדרה חיובית  $(a_n)$ , וידוע כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  קיים.

הוכיחו או הפריכו :

א. הסדרה  $(na_n)$  אינה חסומה.

ב. הסדרה  $(a_{n+1} - a_n)$  חסומה.

ג. הסדרה  $\sqrt[n]{a_n}$  חסומה.

ד. הסדרה  $\frac{a_n}{n}$  מתכנסת.

ה.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$ .



**(48)** סדרה  $(a_n)$  תיקרא יורדת אם היא מקיימת  $a_{n+1} < a_n$  לכל  $n$ .  
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- אם סדרה  $(a_n)$  מקיימת  $|a_{n+1}| < |a_n|$ , אז היא יורדת.
- אם סדרה  $(a_n)$  מקיימת  $a_{n+1} < a_n$ , אז היא יורדת.
- אם סדרה  $(a_n)$  מקיימת  $|a_{n+1}| < |a_n|$ , אז היא יורדת.

**(49)** תהי  $(a_n)$  סדרה, המקיימת  $a_{n+1} - a_n > -1$  ו-  $|a_n| > 2$ , לכל  $n$  טבעי.  
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים  $N$  טבעי, כך ש-  $a_N$  חיובי, אז  $a_n > 2$  לכל  $n \geq N$ .
- כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים או שכל איברי  $(a_n)$  שליליים.
- אם לכל  $n$  מתקיים בנוסף  $a_{n+1} < \frac{a_n}{a_1}$ , אז  $a_1 < -1$ .

**(50)** תהי  $(a_n)$  סדרה, כך ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ .

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים קבוע  $c > 0$ , כך שלכל  $n$  מתקיים  $|a_n| \geq c$ , אז מתקיים:  
כמעט כל איברי  $a_n$  חיוביים או כמעט כל איברי  $a_n$  שליליים.
- אם  $|a_n| > 0$  לכל  $n$ , אז מתקיים:  
כמעט כל איברי  $a_n$  חיוביים או כמעט כל איברי  $a_n$  שליליים.
- אם לכל  $n$  מתקיים  $|a_n| \geq n$ , אז  $(a_n)$  מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חדו"א 1 מ

## פרק 3 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

### תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות ..... (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות ..... (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות ..... (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה ..... (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום ..... (ללא ספר)

# חדו"א 1 מ

פרק 4 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

|    |                                     |
|----|-------------------------------------|
| 65 | 1. תחום הגדרה של פונקציה            |
| 67 | 2. הרכבת פונקציות                   |
| 70 | 3. הפונקציה ההפוכה                  |
| 74 | 4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית  |
| 79 | 5. פונקציה מחזורית                  |
| 82 | 6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית |
| 83 | 7. תרגילים משולבים                  |

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x-4) \quad (17)$$

## תשובות סופיות

(1) כל  $x$ .

(2)  $x \neq \pm 2$

(3) כל  $x$ .

(4)  $x \neq 0, 1, -1$

(5)  $x \neq 2, -1$

(6)  $x \geq 4$

(7)  $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל  $x$ .

(9)  $-1 < x < 1$

(10)  $x < -2, x > 1$

(11)  $x > 0, x \neq 1$

(12) כל  $x$ .

(13)  $x > 0, x \neq 1$

(14)  $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

(15)  $x \neq \frac{\pi k}{4}$

(16) כל  $x$ .

(17)  $3 < x < 5$

(18)  $-2 < x < 0$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

1 נתונות הפונקציות הבאות:  $h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$   
 ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

2 נתון:  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו  $f(f(x))$  עבור  $x = 3$ .

3 נתון:  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x = 8$ .

4 נתון:  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = e^2$ .

5 נתון:  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = 2$ .

6 נתון:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$

7 נתונות הפונקציות:

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$  ו-  $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$ .

(8) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

$$1. n \leq -3$$

$$2. n \geq 1$$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

$$(9) \quad \text{נתון} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ times}}$$

מצא את

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$(6) \quad f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(7) \quad z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{א. } -\sqrt{3} \leq x < 1 \quad \text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(9) \quad f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$



## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בתרגילים 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בתרגילים 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בתרגילים 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?  
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{א. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{ב. } f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad \text{ג. } f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{ד. } f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad \text{ג.}$$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  חח"ע.

ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  על.

ג. אם  $f$  ו- $g$  על, אז  $h$  על.

ד. אם  $f$  ו- $g$  על, אז  $h$  חח"ע.

ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על, אז  $h$  חח"ע.

ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על, אז  $h$  על.

ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  חח"ע.

ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  על. הוכיחו או הפריכו:

א.  $f$  חח"ע.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $g$  על.

- 16)** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  חח"ע. הוכיחו או הפריכו:
- א.  $g$  על.
  - ב.  $f$  על.
  - ג.  $g$  חח"ע.
  - ד.  $f$  חח"ע.

## תשובות סופיות

- (1)  $f^{-1}(x) = 3x + 1$ , כל  $y$ .
- (2)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $y \neq 1$ .
- (3)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$ .
- (4)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$ .
- (5) לא חח"ע. תמונה:  $y \leq -2$  או  $y \geq 2$ .
- (6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$ .
- (7) לא חח"ע. תמונה  $0 \leq y \leq 1$ .
- (8) כן חח"ע. תמונה:  $y > 0$ . פונקציה הפוכה:  $x > 0$ ,  $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .
- (9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$ .
- (10) כן חח"ע. תמונה:  $y \neq 1$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$ .
- (11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.  
 ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.  
 ד. תחום הגדרה  $[0, \infty)$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $[-4, \infty)$ ; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.  
 ג. תחום הגדרה  $(1, \infty]$ , טווח  $(0, 1]$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי זוגית

### שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (6) \quad y = 2^x$$

$$(7) \quad y = \ln x + x^2 \quad (8) \quad y = \sin x \cdot \cos x$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } z(x) = f(x^2), \quad k(x) = -f(x).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ופונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ונתונה פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$  ומקיימת  $|f(x)| < 1$ .

נתון כי  $g(x)$  פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } z(x) = g(x) \ln \left( \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) \text{ היא אי-זוגית ב- } \mathbb{R}.$$

**(13) הוכיחו כי :**

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**(14) הוכיחו כי :**

- א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל  $x$  היא פונקציית האפס.

**(15) הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.**

- נגדיר  $z(x) = (f(x))^n$  כאשר  $n > 1$  טבעי.  
קבעו האם הפונקציה  $z$  היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

**(16) נתונה הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת לכל  $x$ .**

$$f_{\text{odd}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\text{even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{נגדיר:}$$

- א. הוכיחו כי  $f_{\text{odd}}(x)$  היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{\text{even}}(x)$  היא פונקציה זוגית.
- ב. הוכיחו כי  $f(x) = f_{\text{odd}}(x) + f_{\text{even}}(x)$  והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ג. הציגו את הפונקציה  $f(x) = x^2 + x + 1$  כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

**(17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :**

- א. אם  $f$  פונקציה אי-זוגית אז  $f(0) = 0$ .
- ב. אם  $f$  פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב-  $x = 0$  אז  $f(0) = 0$ .

**(18) הוכיחו את הטענות הבאות :**

- א. הפונקציה  $f(x) = \cos x$  היא זוגית.
- ב. הפונקציה  $f(x) = \sin x$  היא אי-זוגית.
- ג. הפונקציה  $f(x) = \tan x$  היא אי-זוגית.
- ד. הפונקציה  $f(x) = \cot x$  היא אי-זוגית.

**(19) נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע**

$$(-a, a) \quad (a > 0).$$

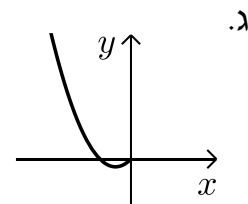
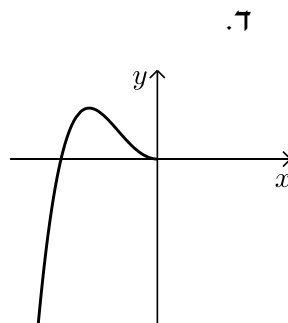
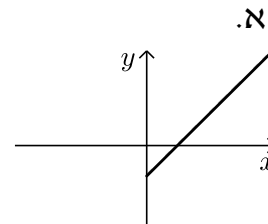
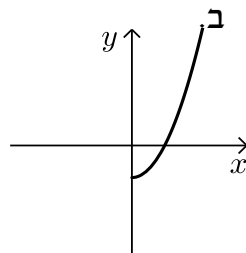
**הוכיחו כי גם  $f^{-1}$  פונקציה אי-זוגית.**

**(20) הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות :**

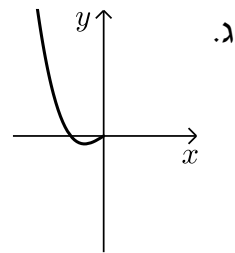
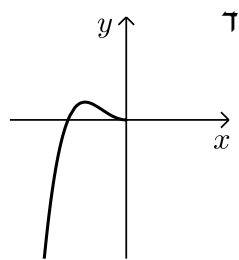
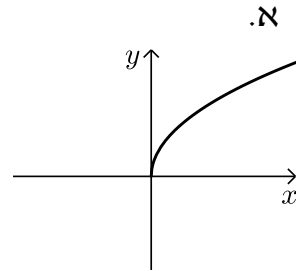
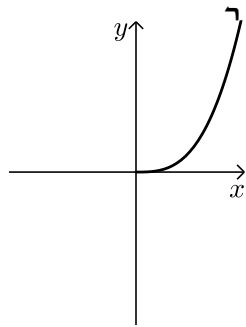
א.  $y = \arctan x$

ב.  $y = \arcsin x$

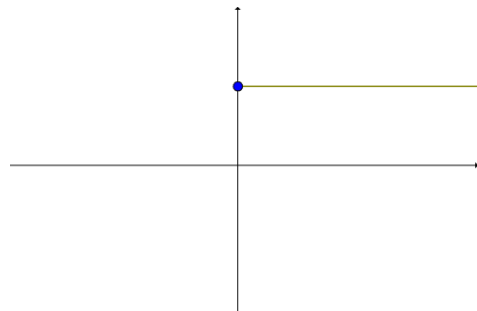
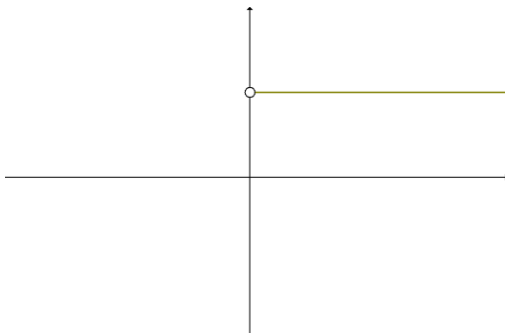
**(21) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית :**



**22** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ .  
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



**23** השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.





## תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(10) טענה ב'.

(11)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) כאשר  $n$  זוגי – זוגית, וכאשר  $n$  אי-זוגי – אי-זוגית.

(16) א.ב. שאלת הוכחה. ג.  $f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2 + 1}_{\text{even}}$

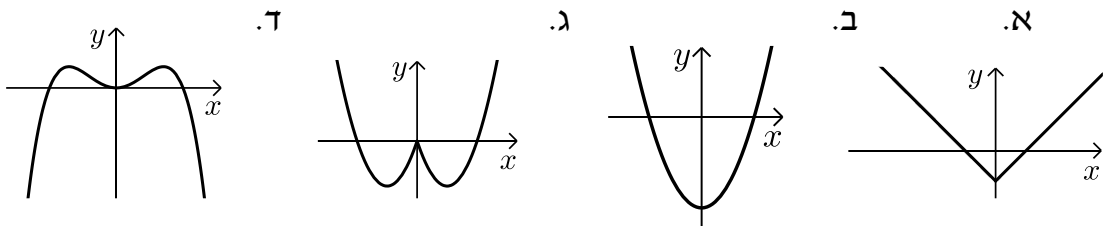
(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

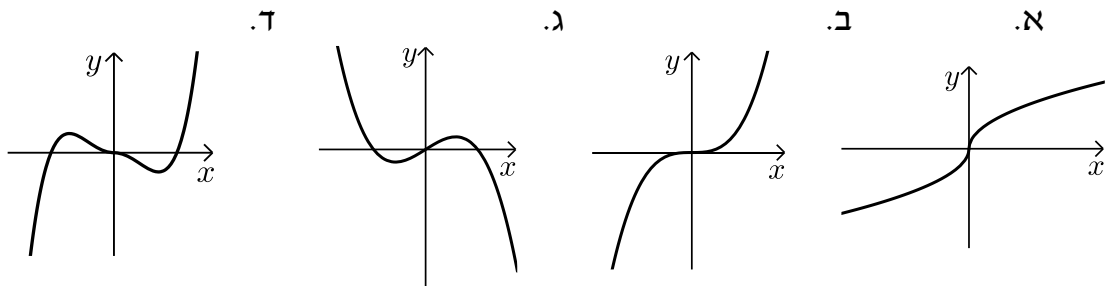
(19) שאלת הוכחה.

(20) שאלת הוכחה.

(21) להלן הגרפים :



(22) להלן הגרפים :



(23) ראו בסרטון.

## פונקציה מחזורית

### שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2) \qquad y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4) \qquad y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6) \qquad y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8) \qquad y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10) \qquad y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12) \qquad y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14) \qquad y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16) \qquad y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18) \qquad y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20) \qquad y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23) \qquad y = x + \cos x \quad (22) \qquad y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26) \qquad y = \frac{\sin x}{x} \quad (25) \qquad y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירת פונקציה.

(27) הוכיחו :

אם  $f(x)$  מחזורית בעלת מחזור  $p$ ,

אז  $y = a + b \cdot f(cx + d)$  מחזורית בעלת מחזור  $\frac{p}{c}$ .

(28) הוכיחו : אם  $T$  הוא מחזור של  $f(x)$ , אז לכל  $n$  שלם  $f(x + nT) = f(x)$ .

**(29)** נתון כי  $f, g$  מוגדרות לכל  $x$  ובעלת מחזור  $p_1, p_2$ , בהתאמה.

נתון כי היחס  $\frac{p_1}{p_2}$  הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ) הן מחזוריות.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x - [x]$ .

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0,1]$ .

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית  $g(x)$ , המוגדרת לכל  $x$ , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  בקטע  $[0,1]$ , ורשמו נוסחה עבור  $f$ .

**(32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0,1]$ .

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית  $g(x)$ , המוגדרת לכל  $x$ , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  ב- $[0,1]$ , ורשמו נוסחה עבור  $g$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $4\pi$     (2)  $\frac{\pi}{10}$     (3)  $\frac{\pi}{4}$     (4)  $\pi$     (5)  $\frac{\pi}{4}$
- (6)  $\frac{\pi}{2}$     (7)  $\pi$     (8)  $\pi$     (9)  $\frac{\pi}{2}$     (10)  $\pi$
- (11)  $40\pi$     (12)  $\pi$     (13)  $2\pi$     (14)  $2\pi$     (15)  $2\pi$
- (16)  $\pi$     (17)  $\pi$     (18)  $\pi$

(19) הפונקציה היא למעשה  $y = 1$ , כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.  
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

(20)  $\frac{\pi}{2}$

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

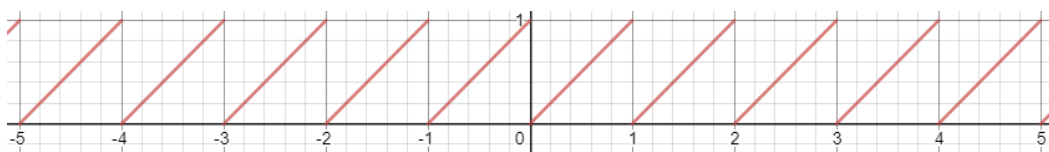
(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

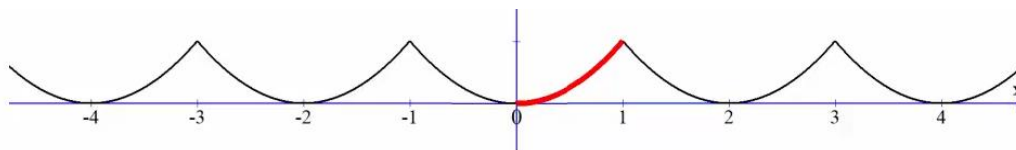
(30) א.



ג. שאלת הוכחה.      ב. 1

(31)  $g(x) = x - k$ , עבור  $k$  שלם, זוגי.

(32)  $g(x) = (x - k)^2$ , עבור  $k$  שלם, זוגי.



## פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

### שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו  $f(1)$ ,  $f(4)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(7)$ .

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

### תשובות סופיות

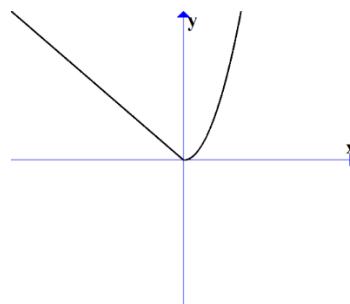
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א.  $f(1)=1$ ,  $f(4)=16$ ,  $f(-4)=4$ ,  $f(0)=0$ ,  $f(7)=\text{undefind}$   
 ב. ג. כללית.



## תרגילים משולבים

## שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על  $\mathbb{R}$ .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $k(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ב':  $z(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ג':  $h(x) = k(x)z(x)$  זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות,  $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

נתון ש- $f$  מונוטונית עולה ממש, ואילו  $g$  מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

איזו טענה נכונה?

א.  $h$  יורדת חלש.

ב.  $h$  עולה ממש.

ג.  $h$  עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד.  $h$  אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצאו את  $h$  בקטע  $[-2,0)$ .

ב. קבעו האם  $h$  חח"ע בקטע  $[-2,0)$ .

ג. קבעו האם  $h$  חסומה בקטע  $[-2,0)$ .

ד. קבעו האם  $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$  היא על.

\* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ .

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

$$\text{הפונקציה } h(x) = f(g(x)) \text{ היא:}$$

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ .

א. בדקו את מונוטוניות  $z(x) = f(g(x))$ .

ב. בדקו את מונוטוניות  $k(x) = g(f(x))$ .

ג. בדקו האם  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$  חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם  $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ , אז הפונקציה  $f$  יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$ ,  
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $f$  עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה  $g$  עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.



## תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.  
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א.  $h(x) = x^2$  ב. הפונקציה חח"ע בקטע.  
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.  
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה  $z(x)$  יורדת חלש. ב. הפונקציה  $k(x)$  יורדת חלש.  
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9)  $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  ; תחום הגדרתה : כל  $x$ .
- (10) ראו באתר.
- (11) א.  $-1 \leq x \leq 2$  ב.  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$  ג. שאלת הוכחה.
- ד.  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  עלייה,  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  ירידה.

# חדו"א 1 מ

## פרק 5 - גבול של פונקציה

### תוכן העניינים

|                            |           |
|----------------------------|-----------|
| 1. הסבר כללי               | (ללא ספר) |
| 2. הצבה                    | 87        |
| 3. צמצום                   | 88        |
| 4. הכפלה בצמוד             | 89        |
| 5. גבולות טריגונומטריים    | 90        |
| 6. פונקציה שואפת לאינסוף   | 92        |
| 7. איקס שואף לאינסוף       | 93        |
| 8. הגבול של אוילר          | 95        |
| 9. כלל הסנדויץ             | 96        |
| 10. גבול של פונקציה מפוצלת | 97        |
| 11. גבול לפי הגדרה         | 100       |

## הצבה

### שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד.  $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

### תשובה

א. 21      ב.  $\frac{11}{12}$       ג. 2      ד. 20

## צמצום

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

## תשובות סופיות

|                    |                    |        |                      |                   |
|--------------------|--------------------|--------|----------------------|-------------------|
| -3 (5)             | $n-1$ (4)          | 6 (3)  | $\frac{10}{8.5}$ (2) | $\frac{5}{6}$ (1) |
| $\frac{1}{5}$ (10) | $\frac{8}{17}$ (9) | 27 (8) | 3 (7)                | 32 (6)            |

## הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + x - 1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

## גבולות טריגונומטריים

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

## תשובות סופיות

|                          |                     |                   |                    |                  |
|--------------------------|---------------------|-------------------|--------------------|------------------|
| $\frac{1}{2}$ (5         | $\frac{1}{2}$ (4    | $\frac{1}{2}$ (3  | $\frac{3}{4}$ (2   | $\frac{3}{4}$ (1 |
|                          | $\frac{1}{4}$ (9    | 4 (8              | $\frac{1}{8}$ (7   | $\frac{1}{2}$ (6 |
| $\frac{1}{\cos^2 a}$ (13 | $-\sin a$ (12       | $\cos a$ (11      | $-\frac{1}{2}$ (10 |                  |
| 1 (17                    | $\frac{2}{\pi}$ (16 | $\frac{1}{2}$ (15 | $\frac{4}{10}$ (14 |                  |

## זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \left( a + \frac{\pi}{2} \right) = \cos a \\ \cos \left( a + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin a \end{array} \right.$$

## פונקציה שואפת לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

## תשובות סופיות

|                |               |              |                |
|----------------|---------------|--------------|----------------|
| $\phi$ (4)     | $-\infty$ (3) | $\phi$ (2)   | $\phi$ (1)     |
| $\phi$ (8)     | $\infty$ (7)  | $\infty$ (6) | $-\infty$ (5)  |
| $-\infty$ (12) | $\phi$ (11)   | 1 (10)       | 0 (9)          |
|                |               |              | $-\infty$ (13) |



## X שואף לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

## תשובות סופיות

|                                                                                                                      |                                     |                       |                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------|-------------------|
| $-\infty$ (4                                                                                                         | 4 (3                                | $-\frac{\pi}{2}$ (2   | 0 (1              |
| -1 (8                                                                                                                | 1 (7                                | -5 (6                 | 0 (5              |
| $\frac{1}{4}$ (12                                                                                                    | $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11 | 1.5 (10               | -3 (9             |
| 2 (16                                                                                                                | $\frac{1}{9}$ (15                   | 4 (14                 | 0 (13             |
|                                                                                                                      | 0 (19                               | $e^{\frac{1}{3}}$ (18 | $\ln 3$ (17       |
| (20) אם $b \neq 0$ : $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$ . אם $b = 0, a > 0$ : $\infty$ . אם $b = 0, a < 0$ : $-\infty$ . |                                     |                       |                   |
| $-\frac{1}{2}$ (24                                                                                                   | $\frac{1}{2}$ (23                   | $\frac{k}{2}$ (22     | 2.5 (21           |
| $\frac{5}{4}$ (28                                                                                                    | $\frac{3^4}{2^{10}}$ (27            | $\frac{a-b}{2}$ (26   | $\frac{1}{2}$ (25 |
|                                                                                                                      |                                     |                       | $\ln(6e)$ (29     |

## הגבול של אוילר

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

### תשובות סופיות

|           |              |              |               |                       |
|-----------|--------------|--------------|---------------|-----------------------|
| $e^3$ (5) | $e^{-1}$ (4) | $e^2$ (3)    | 1 (2)         | $e^{\frac{1}{2}}$ (1) |
|           | $e$ (9)      | $e^{30}$ (8) | $e^{-12}$ (7) | $e$ (6)               |

## כלל הסנדוויץ'

## שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

$$(11) \text{ נתונה פונקציה } z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$ , לכל  $x$ .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

$$(12) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

## תשובות סופיות

$$0 \quad (5) \qquad 3 \quad (4) \qquad \frac{3}{4} \quad (3) \qquad 0 \quad (2) \qquad 0 \quad (1)$$

$$0 \quad (10) \qquad 1 \quad (9) \qquad 4 \quad (8) \qquad \frac{3}{4} \quad (7) \qquad 0 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 \quad (11)$$

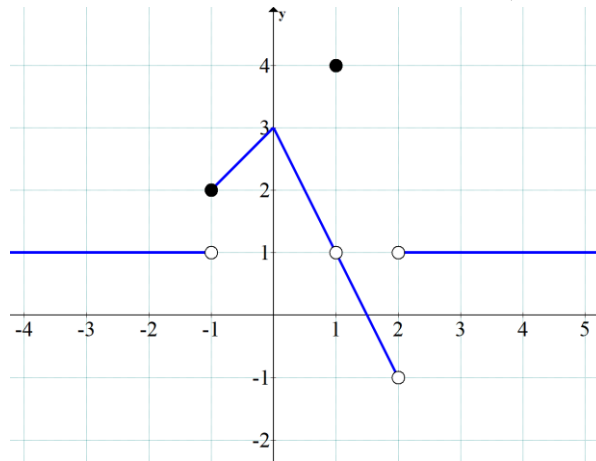
$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$$

$$0 \quad (12)$$

## גבול של פונקציה מפוצלת

## שאלות

1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א.  $1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$      $2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$      $3. \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ב.  $1. \lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2)$      $2. \lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2)$

ג.  $1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f}$      $2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f}$

2) נגדיר פונקציה  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ x^2 - 1 & 0 < x < 2 \\ 1.5x - 6 & x \geq 2 \end{cases}$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$ .

$$(3) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) : \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases}$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ .

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות הבאות:

$$(4) \quad (a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad (a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases}$$

$$(6) \quad (a=0), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(7) \quad (a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(8) \quad (a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(9) \quad \text{א. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{ב. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2}$$

## תשובות סופיות

- (1) א.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cancel{\exists}$ , 3.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \cancel{\exists}$   
 ב.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$   
 ג.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4 - f(x)} = \frac{1}{3}$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - f(x)} = \cancel{\exists}$
- (2) א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$  ג. 6
- (3) א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\cancel{\exists} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$  ג. -1
- (4) 4
- (5)  $\phi$
- (6)  $\phi$
- (7) 1
- (8) -1
- (9) א. אין גבול. ב.  $\frac{1}{6}$

## גבול לפי הגדרה

## שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \quad \text{חשבו, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול את מקרים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f(x) < -4$ .

$$(13) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f^2(x) > 16$ .

$$(14) \quad \text{נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$



$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \quad \text{נתון הגבול}$$

מצאו ערך של  $M > 0$ , עבורו לכל  $x > M$  הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו  $M$ , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$   $\forall x > M$ ).

$$(16) \quad \text{נגדיר את הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(17) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0, \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

(18) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז : הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

$$(19) \quad \text{יש להוכיח כי } 1 \neq \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(20) \quad \text{יש להוכיח כי } 1 \neq \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(21) \quad \text{הוכיחו שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \text{ אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה } f(x) > 2.$$

(22) הוכיחו שאם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > L$ , אז קיימת סביבה נקובה של  $x_0$  שבה  $f(x) > L$ .

## תשובות סופיות

(7)  $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: [GOOL.co.il](http://GOOL.co.il)

# חדו"א 1 מ

פרק 6 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

|     |                                     |
|-----|-------------------------------------|
| 103 | 1. רציפות של פונקציה                |
| 109 | 2. משפט ערך הביניים                 |
| 113 | 3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות |
| 116 | 4. שיטת החצייה                      |

## רציפות של פונקציה

## שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר" <sup>1</sup> שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של  $k$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל  $x$ ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

<sup>1</sup> נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

**(17)** ידוע ש- $f$  רציפה ו- $g$  לא רציפה. האם  $f+g$  רציפה? הוכיחו זאת.

$$(18) \text{ תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ , ותהי  $f(x)$  מוגדרת וחיובית לכל  $x$ .

האם ההרכבה  $g(f(x))$  בהכרח רציפה לכל  $x$ ?

**(19)** תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $(0,1)$ .

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \text{ על ידי } g \text{ תהי הפונקציה המוגדרת בקטע } (0,2)$$

א. האם ניתן שהנקודה  $x_0 = 1$  היא נקודת אי-רציפות סליקה של  $g$ ? נמקו.

ב. האם  $g$  חסומה בקטע  $(0,2)$ ? נמקו.

**(20)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = f(x)f(y)$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .

נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .

הוכיחו ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

**(21)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .

נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .

הוכיחו ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

$$(22) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $f$  חסומה לכל  $x$ .

ב. הפונקציה  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ג. הפונקציה  $f$  מונוטונית לכל  $x$ .

ד. הפונקציה  $f$  זוגית או אי-זוגית לכל  $x$ .

**(23)** ענו על הסעיפים הבאים :

א. פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב-  $x = 0$ .

ב. פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq \sin x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

**(24)** הפונקציה  $f(x)$  רציפה לכל  $x$ .

ידוע כי עבור  $x \neq \pm 1$ ,  $f(x)$  נתונה על ידי הנוסחה  $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$ .

מצאו את הנוסחה של  $f(x)$  לכל  $x$ .

**(25)** הפונקציות  $3g(x) + 2f(x)$  ו-  $f(x) - 2g(x)$  רציפות לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה  $|f(x) - g(x)|$  רציפה לכל  $x$ .

**(26)** תהי  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  ומקיימת  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$ .

א. הוכיחו או הפריכו :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  או  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

**(27)** תהי  $f$  מוגדרת לכל  $x$ .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. אם  $f(\sin x)$  רציפה לכל  $x$ , אז  $f$  רציפה לכל  $x$ .

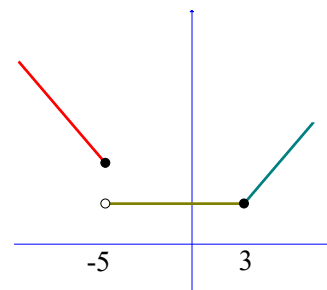
ב. אם  $\sin(f(x))$  רציפה לכל  $x$ , אז  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ג. אם לכל  $x_0$  מתקיים  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$ , אזי  $f(x) = 4$  לכל  $x$ .

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי  $f$  רציפה לכל  $x$ ?

## תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) רציפה בנקודה  $x=1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .
- (4) רציפה בנקודות  $x=0,1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .
- (5) לא רציפה.
- (6) לא רציפה.
- (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
- (8)  $k=1$
- (9)  $k=4$
- (10)  $k=\frac{2}{3}$
- (11)  $k=-1$
- (12)  $a=0, b=\frac{1}{2}$
- (13)  $a=2, b=1$  או  $a=1, b=2$
- (14)  $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (15)  $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל  $x \neq -5$ . ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (19) א. לא. ב. כן.
- (20) שאלת הוכחה.



**(21)** שאלת הוכחה.

**(22)** א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

**(23)** שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad \textbf{(24)}$$

**(25)** שאלת הוכחה.

**(26)** שאלת הוכחה.

**(27)** שאלת הוכחה.

## משפט ערך הביניים

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x - 0.25 \sin x = 7$$

$$(4) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 5-6 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(5) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה לכל  $x$ , המקיימת:  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכיחו שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, 4]$  פונקציה רציפה.

הוכיחו שלמשוואה  $2x + f(x) = 1$  יש לפחות פתרון אחד.

(8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה  $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$  יש פתרון.

$$(9) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}.$$

א. חשבו את  $f(0)$ ,  $f(2)$ .

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה  $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע  $(0, 2)$ ?

**10** תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$  המקיימות  $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$ . הוכיחו שקיימת נקודה  $a < c < b$  שבה  $f(c) = g(c)$ .

**11** נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור  $[a, b]$  שהוא חלקי לתחום הגדרתה. נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ .

הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [a, b]$  כך ש- $f(c) = c$ .  
נקודה  $c$  כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

**12** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = c^{1.5}$ .

**13** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(1)$ .  
א. הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 0.5]$  כך ש- $f(c) = f(c + 0.5)$ .  
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות  $c, d \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = f(d)$ .

**14** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) < f(2) < f(1)$ . הוכיחו כי קיימים  $c_1, c_2 \in [0, 2]$  כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$ .

**15** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(8)$ . הוכיחו כי קיימות נקודות  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$  כך ש- $f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$ .

**16** הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x + \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**17** הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x \cdot \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**18** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור  $2\pi$ . הוכיחו שקיים  $x_0 \in \mathbb{R}$  כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$ .

**19** יהיו  $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$  קבועים המקיימים  $a_1 + \dots + a_n = 1$ . הוכיחו כי למשוואה  $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$  יש לפחות פתרון אחד.

(20) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חח"ע ורציפה.

הוכיחו כי  $f$  עולה ממש או יורדת ממש.

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  פונקציה חח"ע ועל.

הוכיחו כי  $f$  לא רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

(21) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  פונקציה רציפה.

הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של  $x$ , שעבורם  $f(x) = \sin x$ .

(22) יהי  $P$  פולינום ממעלה זוגית, מהצורה  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ ,

ונניח כי  $a_0 < 0$ .

הוכיחו כי ל- $P$  ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

(23) יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות המקיימות :

$$0 < k \in \mathbb{R} \text{ כאשר } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$$

הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה  $f(x) = g(x)$ .

(24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ , ותהיינה  $x_1, \dots, x_n$  (כאשר  $n > 1$ )

נקודות כלשהן ב- $(a, b)$ .

הוכיחו שקיימת נקודה  $c$  בקטע  $(a, b)$ , כך ש-

$$f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

ב. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ .

האם לכל  $c \in (a, b)$ , ניתן למצוא נקודות  $x_1, \dots, x_n$ , שונות זו מזו,

$$\text{כאשר } n > 1, \text{ כך ש- } f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)) ?$$

הוכיחו זאת.

(25) תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע פתוח  $(a, b)$ .

$$\text{נניח כי: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$$

הראו כי תמונת הקטע  $(a, b)$  היא  $\mathbb{R}$ .

(26) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 4$ .

תהי  $S = \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$ .

א. הוכיחו ש- $S$  לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה  $S$  יש חסם עליון, שנסמנו  $\alpha$ .

ג. הוכיחו כי  $\alpha \in (0,1]$ .

ד. הוכיחו כי  $f(\alpha) = 0$ .

(27) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, כך ש- $f(a) = f(b)$ .

הוכיחו שקיימים  $a < x_1 < x_2 < b$ , כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$ .

(28) תהי  $z(x)$  פונקציה רציפה בקטע  $[a,b]$  ויהי  $0 \leq r \leq 1$ .

הוכיחו שיש  $c$  בקטע, עבורו מתקיים  $z(c) = rz(a) + (1-r)z(b)$ .

(29) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשוואה  $A \sin x + B \cos x = C \sin 2x$  יש פתרון.

ב. תהי  $f(x)$  רציפה לכל  $x$  המקיימת  $f(0) > 0$ ,  $f(4) > 2f(2)$ .

הוכיחו שקיים  $c$  כך ש- $f(2c) = 2f(c)$ .

ג. תהי  $f(x)$  רציפה לכל  $x$  המקיימת  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכיחו שקיים  $a$  כך ש- $f(a) = \frac{1}{a}$ .

(30) פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ .

לפונקציה יש את התכונה הבאה:

כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.

הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

## תשובות סופיות

(8)  $[0,1]$

(9) א.  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 5$ . ב. לא.

שאלות 1-7 ושאלות 10-30 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## תכונות נוספות של פונקציות רציפות

### שאלות

- 1 קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.  
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע  $[0,1]$ , שהיא :
  - א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
  - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
  - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
  - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
  - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
  - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
  - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
  - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
  - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
  - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
  - יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע  $[0,1]$ , על ידי  $f$ , היא קטע.
- 2 תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(x) > 0$  לכל  $x \in [a,b]$ .  
הוכיחו שקיים  $\alpha > 0$ , כך ש-  $f(x) \geq \alpha$  לכל  $x \in [a,b]$ .
- 3 תהי  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ונניח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיים.  
הוכיחו ש-  $f$  חסומה.
- 4 יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות  $x_1, x_2$ , המקיימות  $x_1 < x_2$ , קיימת נקודה  $x_3$  ש-  $x_1 < x_3 < x_2$ , שעבורה  $f(x_3) = g(x_3)$ .  
הוכיחו כי  $f(x) = g(x)$  לכל  $x$ .
- 5 תהי  $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$  פונקציה על.  
הוכיחו ש-  $f$  לא רציפה ב-  $[0,1]$ .
- 6 תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x) = f(x^2)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .  
הוכיחו ש-  $f$  פונקציה קבועה.

(7) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $f(x) = f(1)x$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

(8) תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בקטע  $(a, b)$ , ונניח שקיים קבוע ממשי  $K$ , כך שלכל שתי נקודות,  $x_1$  ו- $x_2$ , בקטע  $(a, b)$ , מתקיים **תנאי ליפשיץ**:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$$

הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה בקטע  $(a, b)$ .

\* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

(9) הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט. באריכות:

הוכיחו שאם  $f$  פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$ , כך ש- $f(x) \geq f(x_0)$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

(10) בסעיפים א ו-ב הוכיחו:

א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.

ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.

ג. תהי  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה  $x \in \mathbb{R}$ .

הערה: פונקציה זאת נקראת פונקציית דיריכלה.

(11) הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ .

ב. אם  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ .

בשאלות 12-13 הוכיחו:

(12) אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , בה  $f$  חסומה.

(13) אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , ואם  $f(x_0) > 0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , שבה  $f(x) > 0$ .

**14** יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות המקיימות  $f(a) \neq g(a)$ , עבור  $a$  ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq g(x)$ .

הערה

תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:  
תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $f(a) \neq 0$ , עבור  $a$  ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq 0$ .  
פשוט לקחנו  $g(x) = 0$ .  
בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

**15** הוכיחו כי אם הפונקציה  $f(x)$  רציפה בנקודה  $a$ , אזי הפונקציה  $g(x)$ ,

$$g(x) = \begin{cases} -c & f(x) < -c \\ f(x) & |f(x)| \leq c \\ c & f(x) > c \end{cases}$$

המוגדרת על ידי  $|f(x)| \leq c$ , גם רציפה בנקודה  $a$  (כאשר  $c$  מספר חיובי כלשהו).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ e^{-x} - e^{-1} & x < 1 \end{cases}$$

**16** נתונה הפונקציה

בדקו האם  $f$  הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את  $f^{-1}(x)$ .

## תשובות סופיות

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ -\ln(x + e^{-1}) & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)



## שיטת החצייה

## שאלות

(1) נתונה המשוואה  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ . בעזרת שיטת החצייה בקטע  $[-2, 3]$ ,

מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות.  
מהו קירוב השורש?

(2) נתונה המשוואה:  $x^3 - x - 2 = 0$ .

א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.

ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?

ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

## תשובות סופיות

(1) 0.07

(2) א.  $[1, 2]$  ב. 10 ג.  $x = 1.520$

# חדו"א 1 מ

פרק 7 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

|     |                                    |
|-----|------------------------------------|
| 117 | 1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה |
| 124 | 2. נגזרות חד צדדיות                |

## הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

### שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

### שאלות\*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$(1) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (3) \quad f(x) = \sin 4x$$

$$(4) \quad f(x) = e^x \quad (5) \quad f(x) = \ln x \quad (6) \quad f(x) = \sqrt{x+10}$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44).$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}.$$

$$(9) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4.$$

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה  $x=1$ .  
האם קיים משיק בנקודה זו?

$$(11) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה בנקודה  $x=0$ ?

ב. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה  $x=0$ ?

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

$$(12) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה בנקודה  $x = 0$ ?

ב. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה  $x = 0$ ?

(13) חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(14) נתון כי  $f$  גזירה בנקודה  $x_0$ . הוכח כי:

$$\text{א. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{ב. } 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

(15) נתון כי  $f$  גזירה וזוגית. הוכיחו כי  $f'$  אי זוגית.

(16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$  ומקיימת לכל  $x, y$  ב- $[a, b]$ :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $[a, b]$  וחשבו את נגזרתה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = |\sin^5 x|$$

א. חשבו את  $f'(x)$ .

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן  $f'(x) = 0$ .

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

## (20) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $h$  גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g + h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ב. אם  $h$  אינה גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g + h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ג. אם  $h$  אינה גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g \cdot h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ד. אם  $h$  גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g \cdot h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .

## (21) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $f$  גזירה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$ .
- ב. אם הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$  קיים וסופי, אז  $f$  גזירה.

## (22) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $f$  גזירה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ , אז  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$ .
- ב. אם  $f$  גזירה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$ , אז  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ .

(23) נתון כי  $f(x)$  רציפה ב- $x = 4$ , ומקיימת  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x - 4)}{x - 4} = 0$ .

הוכיחו ש- $f$  גזירה ב- $x = 4$ , וחשבו את  $f'(4)$ .

(24) תהי  $f$  פונקציה רציפה בסביבת הנקודה  $x = 0$  המקיימת  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

א. הוכיחו כי  $f(0) = 0$ .

ב. הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $x = 0$  ו- $f'(0) = 0$ .

(25) תהי  $f$  פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי  $f(0) = 0$  ו- $f'(0) = k$ .

הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$ .

(26) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה בנקודה  $x_0$ .

א. אם  $f(x_0) \neq 0$ , הוכיחו שגם  $|f|$  גזירה ב- $x_0$ .

ב. אם  $f(x_0) = 0$ , הראו שייתכן כי  $|f|$  גזירה ב- $x_0$  וייתכן שלא.

(27) תהינה  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות בנקודה  $x_0$ .

נגדיר  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הראו שאם  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , אז  $h$  גזירה ב- $x_0$ .

(28) תהי  $f$  פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

הוכיחו כי אם  $f$  גזירה ב-0, אז  $f'(0) = 0$ .

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

(29) נתונה פונקציה  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ,

לכל  $x, y \in (0, \infty)$ .

נתון כי  $f$  גזירה בנקודה  $x=1$ .

א. הוכיחו כי  $f(1) = 0$  ו- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ .

ב. הראו כי  $f$  גזירה, ושלכל  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ .

(30) נתון כי  $f$  פונקציה גזירה המקיימת  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$ ,

הוכיחו ש- $f$  פונקציה לינארית.

(31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם  $f$  גזירה ב- $x_0$ , אז  $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n}$

לכל סדרה  $a_n \rightarrow 0$ .

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה בנקודה  $x_0 = 1$ , ו- $f(1) = 1$ .

הראו שאם  $k \in \mathbb{N}$ , אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right) - k \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(1)$$

ג. חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{10}{n}} - 10 \right]$ .

(32) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה  $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = (x-1)^2 D(x)$  גזירה רק בנקודה  $x=1$ .

(33) פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq x^2$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה גזירה ב-  $x=0$ .

(34) פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq \sin^2 x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

(35) תהי  $f$  פונקציה גזירה ב-  $x_0$ .

א. הוכיחו כי  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ .

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה  $f$ , באופן שהגבול בסעיף א' קיים,

אך  $f'(x_0)$  אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות  $f'(x_0)$  את הגבול  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0+3h)}{h}$ .

(36) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים ב-  $x_0$ .

א. הוכיחו כי  $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$ .

ב. תנו דוגמה של פונקציה  $f$ , באופן שהגבול בסעיף א' קיים,

אך  $f''(x_0)$  אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

(37) נתון כי  $f(x)$  רציפה בנקודה  $x=a$ , ונגדיר פונקציה חדשה  $z(x) = (x-a)f(x)$ . הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $z(x)$  גזירה בנקודה  $x=a$ .

ב.  $z'(x)$  רציפה ב-  $x=a$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $f'(x) = 2x + 4$  (2)  $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$  (3)  $f'(x) = 4 \cos 4x$
- (4)  $f'(x) = e^x$  (5)  $f(x) = \frac{1}{x}$  (6)  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}}$
- (7)  $44!$  (8)  $2$  (9)  $4$
- (10) א. רציפה לכל  $x$ . ב. לא גזירה בנקודה  $x=1$ . קיים משיק אנכי בנקודה.
- (11) א.  $n > 1$ . ב.  $n > 2$
- (12) א.  $n > 1$ . ב.  $n > 1$
- (13) א.  $\frac{1}{4}$ . ב.  $e$
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.  $f' = 0$
- (17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$ , ומתקיים:  $f'(0) = 0$ .
- (18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$ , ומתקיים:  $f'(1) = 0$ .
- (19) א.  $f'(x) = \begin{cases} 5 \sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5 \sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases}$  ב.  $x = \frac{\pi}{2}n$
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.
- (25) שאלת הוכחה.
- (26) שאלת הוכחה.
- (27) שאלת הוכחה.
- (28) שאלת הוכחה.
- (29) שאלת הוכחה.
- (30) שאלת הוכחה.
- (31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55
- (32) שאלת הוכחה.



(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

(35) א. שאלת הוכחה. ב.  $f(x) = |x|$ . ג.  $-5f'(x_0)$ .(36) א. שאלת הוכחה. ב.  $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ .

(37) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## נגזרות חד-צדדיות

## שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases}$  על מנת להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות 2-9 בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו. בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7)$$

$$f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

10) בדקו האם הפונקציה משאלה 5 גזירה פעמיים בנקודה  $x = 0$ .

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (11) \text{ נתונה הפונקציה}$$

- א. עבור איזה ערך של הקבוע  $a$  הפונקציה רציפה בנקודה  $x = -1$ ?
- ב. עבור ערך ה- $a$  שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה  $x = -1$ . האם קיים משיק בנקודה זו?

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

13 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

$$14 \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + 4x & x < 0 \\ px + q & x \geq 0 \end{cases}$$

קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים  $p$  ו- $q$  הפונקציה הנתונה:  
א. רציפה. ב. גזירה.

15 חשבו את  $f'(0)$ , עבור הפונקציה:  $f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1|$

$$16 \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos \pi x|} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל  $x$  ממשי.

### תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם  $[x]$  מחזירה לכל מספר ממשי  $x$  את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- $x$  (מעגלת כלפי מטה). למשל:  $[-4.1] = -5$ ,  $[4.1] = 4$ .

17 נתונה הפונקציה  $f(x) = [x] - [-x]$ .  
חשבו את  $f'(x)$ .

18 נתונה הפונקציה  $f(x) = [x] \sin(\pi x)$ .  
חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

19 נתונה הפונקציה  $f(x) = [x](1 - \cos(\pi x))$ .  
חשבו את  $f'(x)$ .

**(20)** הוכיחו שאם  $f$  היא פונקציה המקיימת  $|f(x)| \leq x^2$  לכל  $x$ , אז  $f$  גזירה ב- $x=0$ .

**(21)** תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $x_0=0$ . הוכיחו כי הפונקציה  $z(x)=|x|f(x)$  גזירה ב- $x_0=0$  אם ורק אם  $f(0)=0$ .

**(22)** יהיו  $f$  ו- $g$  שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של  $x_0 \in \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f(x_0)=g(x_0)$  ו- $f'_-(x_0)=g'_+(x_0)$ ,

אז הפונקציה  $z$ , המוגדרת על ידי  $z(x)=\begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$ , גזירה ב- $x_0$ .

ב. אם  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  לא גזירה ב- $x_0$  ו- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , אז  $g \circ f$  איננה גזירה ב- $\mathbb{R}$ .

ג. אם  $g$  גזירה מימין ב- $x_0$  והפונקציה  $f$  מוגדרת בסביבה מלאה של  $g(x_0)$  וגזירה מימין ב- $g(x_0)$ , אזי  $f \circ g$  גזירה מימין ב- $x_0$ .

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

**(23)** תהיינה  $f$  ו- $g$  פונקציות המוגדרות ב- $\mathbb{R}$ . נתון ש- $g$  היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$ , ולכל  $x > y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , ושלכל  $x$  ממשי מתקיים  $f'(x)=g(x)$ .

$$\textbf{(24) נתונה הפונקציה } f(x)=\begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & x < 1 \end{cases}$$

א. בדקו את רציפות וגזירות  $f$ .

ב. בדקו האם  $f$  הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את  $f^{-1}(x)$ .

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4 \ (x > 1) \ , \ f'(x) = -4 \ (x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x \ (x \geq 0) \ , \ f'(x) = 4x \ (x < 0) \quad (7)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

(10) לא גזירה פעמיים בנקודה  $x = 0$ .

(11) א.  $a = 1$  ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (12)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (13)$$

$$(14) \text{ א. } q = 0 \quad \text{ב. } q = 0, p = 4$$

$$(15) -10$$

(16) שאלת הוכחה.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (17)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \cos(\pi x) \pi & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (18)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \sin \pi x & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z}, x \text{ even} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z}, x \text{ odd} \end{cases} \quad (19)$$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות 20-23 היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & 0 < x < \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad (24) \quad \text{א. רציפה לכל } x \text{ וגזירה לכל } x \neq 1.$$

# חדו"א 1 מ

פרק 8 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| 1. כללי הגזירה              | (ללא ספר) |
| 2. תרגול בכללי הגזירה       | 129       |
| 3. תרגילים נוספים לפי סוגים | 133       |
| 4. גזירה סתומה              | 136       |
| 5. כלל השרשרת               | 138       |
| 6. גזירה לוגריתמית          | 141       |

## תרגול בכללי הגזירה

## שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

**הערה:** בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייהן.



## תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2\ln x + 1), \quad f''(x) = 2\ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2\ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2\tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{(1-(2x+3)^2)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left( \frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left( \frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left( 1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

## תרגילים נוספים לפי סוגים

### שאלות

#### הנגזרת של פונקציית חזקה

(1) גזרו את הפונקציות הבאות:

|                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x^1$             | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

(2) גזרו את הפונקציות הבאות:

|                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$             | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

#### הנגזרת של קבוע

(3) גזרו את הפונקציות הבאות:

|                |                         |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

#### הנגזרת של סכום והפרש

(4) גזרו את הפונקציות הבאות:

|                                 |                                                                         |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|

## הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = (5x-2)^3$     ב.  $f(x) = (x^3+6)^5$     ג.  $f(x) = 3(x-x^2)^2$

ד.  $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$     ה.  $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

## הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{3}{x}$     ב.  $f(x) = \frac{2}{x}$     ג.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$     ד.  $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה.  $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$     ו.  $f(x) = \frac{2}{3-x}$     ז.  $f(x) = \frac{6}{x+5}$

## הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב.  $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג.  $f(x) = x^3(6-x)^4$

## הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$     ב.  $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$     ג.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד.  $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$     ה.  $f(x) = \frac{1}{x}$     ו.  $f(x) = \frac{3}{x^3}$

## הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt{x}$     ב.  $f(x) = 4\sqrt{x+1}$     ג.  $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד.  $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$     ה.  $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$     ו.  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

## תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 3x^2 & \text{ב. } f'(x) = 7x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x \\ \text{ד. } f'(x) = 1 & \text{ה. } f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח. } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 6x^2 & \text{ב. } f'(x) = 21x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד. } f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה. } f'(x) = 8 & \text{ו. } f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז. } f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח. } f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (3)

$$\text{א. } f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב. } f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. } f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב. } f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א. } f'(x) = 6(x - x^2)(1 - 2x) \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{3}{4}(5 - x)^2 \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב. } f'(x) = (5x+1)^2(20x-44)$$

$$\text{ג. } f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x)$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

## גזירה סתומה

## שאלות

(1) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^2 + y^5 - 1 = 1$ .

(2) גזרו את הפונקציה הסתומה  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .

(3) גזרו את הפונקציה הסתומה  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .

(4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה  $e^{y^2-4x} + x^2 y^3 = \sin(y-2x) + 4y + 1$  חשבו את  $y'$  בנקודה  $(1,2)$ .

(5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה  $\sqrt{4x+y^3} + \cos^2(xy) = \ln(x^2 y + 1) + \ln e^3$  חשבו את  $y'$  בנקודה בה  $y = 0$ .

(6) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^y - xy = 10$ .

(7) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^y - y^x = 1$ .

(8) נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$  מצאו את ערך  $y^n$  בנקודה בה  $y = 1$ .

(9) נתון עקום שמשוואתו  $yx^2 + e^y = x$ .  
א. הראו שעבור  $x=1$  קיים ערך  $y$  אחד ויחיד ומצאו אותו.  
ב. חשבו את  $y''$  בנקודה בה  $x=1$ .

(10) נתון כי המשוואה  $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$ ,  
מגדירה את  $y = y(x)$  כפונקציה סתומה של  $x$ .  
נתון כי  $h(y)$  גזירה ברציפות ויורדת.  
הוכיחו כי  $y(x)$  יורדת חזק.

## תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y'_{(1,2)} = -\frac{14}{11} \quad (4)$$

$$y'_{(1,0)} = 1 \quad (5)$$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (6)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$y''_{(1,0)} = -\frac{9}{8} \text{ ב.} \quad (9)$$

$$(10) \text{ שאלת הוכחה.}$$



## כלל השרשרת

## שאלות

(1) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(4) = 10$ .

נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x^2)$ .

חשבו את  $g'(2)$ .

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פונקציה  $f(x)$ . נגדיר פונקציה חדשה

$$z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(4x+1)$$

חשב ואת  $z'(x)$

ב. נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = e$

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{f^2(\ln x)}$$

חשבו את  $z'(e)$

$$(3) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי  $f(10) = f'(10) = 4$

חשבו  $g'(100)$

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 4$

חשבו  $g'(1)$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי  $f(0) = 2$  ,  $f'(0) = 1$

חשבו  $g'(1)$ .

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי  $f(4) = 1$  ,  $f'(4) = 2$

חשבו  $g'(1)$ .

$$(7) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$  ,  $f'(1) = 4$

חשבו  $g'(1)$ .

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה  $f'''(x)$  היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה  $f(x)$  אי-זוגית נגדיר  $g(x) = (f(x))^4$ .

קבעו האם הפונקציה  $g'(x)$  זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.

האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

## תשובות סופיות

(1) 40

$$(2) \quad z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1) \cdot 4 \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad z'(e) = 3\frac{3}{4}$$

(3)  $\frac{17}{80}$ 

(4) 36

(5)  $\frac{8}{9}$ 

(6) 44

(7) -2

(8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

## גזירה לוגריתמית

### שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left( \sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y' = y \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left( (10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[ 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[ 3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

# חדו"א 1 מ

פרק 9 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

## תוכן העניינים

|     |                                          |
|-----|------------------------------------------|
| 142 | 1. המשיק                                 |
| 144 | 2. בעיות משיקים                          |
| 146 | 3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק           |
| 150 | 4. הנורמל                                |
| 151 | 5. זווית שבין שתי עקומות                 |
| 152 | 6. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם |

## המשק

### שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה
  - א.  $f(x) = 2x^3 - 7x$  , בנקודה  $(2, 2)$ .
  - ב.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$  , בנקודה  $x = -2$ .
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$  , כאשר  $a > 0$ .
 

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$  , הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע  $a$ .
- (3) הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $h(x) = 3\sqrt{x}$ .
 

מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$  , בנקודה  $(1, 15)$  , הוא  $21 \ln 3$ .
 

מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$  , בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  , הוא  $\frac{e}{3}$ .
 

מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (6) לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$  , לגרף הפונקציה
 
$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$$

לכל ערך  $k$  כזה מצאו את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ .
  - א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות  $x = 1$  ו- $x = 3$ .
  - ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א', עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(8) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$ .

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(9) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ .

מצאו את שיעורי ה- $x$  של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(10) פונקציה  $f(x)$  גזירה ברציפות ב-0 ומקיימת  $f(0) = 0$ .

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  היא  $30^\circ$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

(11) מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , בנקודות  $x = 1$  ו- $x = 0$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 17 ב. 4

(2)  $a = 2$

(3)  $(1, 3)$

(4)  $a = 2, b = -1$

(5)  $a = 2, b = -2$

(6) לערך  $k = 6$ , בנקודה  $x = 1$ ; לערך  $k = \frac{158}{27}$ , בנקודה  $x = \frac{1}{3}$ .

(7) א. ראו באתר. ב.  $\alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$

(8)  $x = 5, x = -1$

(9)  $x = 1, x = \frac{1}{3}$

(10)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(11)  $\alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$

## בעיות משיקים

### שאלות

(1) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ . מצאו את  $a$  ו- $c$ .

(4) הישר  $y = x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $x = e$ .

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6)  $(2, -3), y = x^2 - 2x + 1$

(7)  $(-3, 1), y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(9) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו. מצאו את  $k$  ואת נקודת ההשקה.



10 נתון כי  $f$  גזירה לכל  $x$ .

א. הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = x^2 f(3x-2)$  גזירה לכל  $x$ .

ב. הישר  $2y = 10x + 11$  משיק לגרף הפונקציה  $z(x)$  בנקודה  $x = -1$ .

מצאו את השיפוע של  $f(x)$  בנקודה  $x = -5$ .

### תשובות סופיות

1 נקודת ההשקה היא  $(-1, 5)$  ומשוואת המשיק היא  $y = 4x + 9$ .

2 נקודת ההשקה היא  $(4, 12)$  ו-  $b = 4$ .

3 נקודת ההשקה היא  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  ומשוואת המשיק היא  $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ .

4 נקודת ההשקה היא  $(0, 1)$  ומשוואת המשיק היא  $y = x + 1$ .

5 משוואת המשיק היא  $y = \frac{1}{e}x$ .

6  $y = 6x - 15, (4, 9)$  ;  $y = -2x + 1, (0, 1)$

7 המשיק  $(9, 3), y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ .

8  $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

9  $k = 1.5$ , נקודת ההשקה  $(1, 1)$ .

10 א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

## בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

### שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  בנקודה  $x = -1$ .

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  ששיפועו 2.

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  בנקודה  $x = 0$ .

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  בנקודה  $x_1 = 1$ .

(5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  בנקודה  $y = 2$ , הוא -4. מצאו את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  היוצרים זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$  ששיפועו -2.

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  בנקודה  $x_1 = 2$ .

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  בנקודה  $(1, 6)$ , הוא -6. מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה  $y = e^{2x} + 3ex$ , והעבירו לה משיק בנקודה  $x = 2$ . מצאו את משוואת המשיק.

11 מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$  בנקודה  $x = 0$ .

12 מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .

13 לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ . מצאו את משוואת המשיק.

14 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$  בנקודה  $x = 1$ .

15 הגרפים של  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - \ln x$  נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

16 מצאו את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$  בנקודה  $(3, 4)$ .

17 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$  דרך הנקודה  $(1, 1)$ .

18 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$  דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

19 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy+y} + x^2y = xy^2$  דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

20 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$  דרך הנקודה  $(0, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(21)** נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן  $y = 0$ .

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

## תשובות סופיות

(1)  $y = 24x + 22$

(2)  $y = 2x - 3$

(3)  $y = 1$

(4)  $y = -12x + 9$

(5)  $a = 2, y = -4x - 2$

(6)  $y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3}$

(7)  $y = -2x + 8$

(8)  $y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16}$

(9)  $a = 6, b = 2, y = -6x + 12$

(10)  $y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4$

(11)  $y = 3x + 1$

(12)  $y = (-e^2 + e)x + e^2, y = (e - 1)x + e$

(13)  $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(14)  $y = (\ln 2 + 1)x - 1$

(15)  $y = \frac{1}{e}x$

(16)  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

(17)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(18)  $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5}$

(19)  $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6}$

(20)  $y = \frac{4}{3}x + 2$

(21) א.  $(0, 0), (1, 0)$  ב. בראשית הצירים:  $y = -x$ , המשוואה השנייה:  $y = x - 1$ .

## הנורמל

### שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2x-2}$ , בנקודה  $(3, 2)$ .
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות  $(5, 0)$  ו- $(2, 4)$ .
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ , בנקודה מסוימת, היא  $4y + x = 6$ . מצאו את הנקודה.

### תשובות סופיות

- (1)  $y = -2x + 8$
- (2)  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3)  $(2, 1)$

## זווית שבין שתי עקומות

### שאלות

(1) מצאו את הזווית בין הפונקציות  $y = f(x) = x^2$  ו-  $y = g(x) = \frac{1}{x}$ .

(2) מצאו את הזווית בין המעגל  $x^2 + y^2 = 8$  והפרבולה  $y^2 = 2x$ .

(3) הוכיחו שהאליפסה  $x^2 + 2y^2 = 8$  וההיפרבולה  $x^2 - y^2 = 2$  נחתכות בזווית ישרה.

### תשובות סופיות

(1)  $71.57^\circ$

(2)  $71.56^\circ$

(3) שאלת הוכחה.

## נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

### שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

### תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \approx 2.25, \sqrt{8} \approx 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \approx 1, \sqrt[3]{9} \approx 2\frac{1}{12} \quad (2)$$



# חדו"א 1 מ

פרק 10 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף.....153
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף.....156
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף.....157
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף.....158
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל.....159

## גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\frac{0}{0}$  ו-  $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

## תשובות סופיות

|                       |                    |                    |                    |                    |
|-----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\frac{1}{6}$ (5      | 4 (4               | $n-1$ (3           | $\frac{20}{17}$ (2 | $\frac{5}{6}$ (1   |
| $\ln \frac{a}{b}$ (10 | 1 (9               | $-\frac{3}{2}$ (8  | $\frac{5}{6}$ (7   | $\frac{3}{2}$ (6   |
| 1 (15                 | 2 (14              | $-\frac{1}{2}$ (13 | $\frac{1}{6}$ (12  | $\frac{1}{2}$ (11  |
| $\frac{1}{2}$ (20     | $\frac{1}{6}$ (19  | $\frac{a}{b}$ (18  | $\frac{a}{b}$ (17  | 1 (16              |
| $-\frac{1}{2}$ (25    | $-\frac{1}{3}$ (24 | $\frac{1}{3}$ (23  | $\frac{1}{8}$ (22  | $\frac{1}{2}$ (21  |
| $\frac{1}{2}$ (30     | $\frac{2}{3}$ (29  | 1 (28              | 1 (27              | $-\frac{3}{4}$ (26 |
| 0 (35                 | $\infty$ (34       | 0 (33              | $\infty$ (32       | $\frac{1}{2}$ (31  |

## גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה  $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( \frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

|       |                   |       |       |              |
|-------|-------------------|-------|-------|--------------|
| 0 (5) | 0 (4)             | 0 (3) | 0 (2) | $\infty$ (1) |
|       | $\frac{5}{2}$ (9) | 6 (8) | 0 (7) | 0 (6)        |

## גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \quad (6)$$

## גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה:  $1^{\pm\infty}$ ,  $0^{\pm\infty}$ ,  $\infty^0$

חשבו את הגבולות הבאים:

|                                                          |                                                                               |                                                                              |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2}$ (3)              | $\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, (a > 0)$ (2)                                | $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (1)                               |
| $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}}$ (6) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ (5)                                     | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ (4)   |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ (9)         | $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$ (8)                       | $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (7) |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$ (12)    | $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x}$ (11)                                  | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$ (10)                                   |
|                                                          | $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (14) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x}$ (13)                           |

### תשובות סופיות

|           |                |               |           |         |
|-----------|----------------|---------------|-----------|---------|
| $e^2$ (5) | 1 (4)          | 1 (3)         | 1 (2)     | $e$ (1) |
| 1 (10)    | $e^{-1/2}$ (9) | $e^{1/3}$ (8) | $e^3$ (7) | 1 (6)   |
|           | $e$ (14)       | 1 (13)        | $e$ (12)  | 1 (11)  |

## מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

### שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ .

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים. לבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$



# חדו"א 1 מ

## פרק 11 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

|     |                                             |
|-----|---------------------------------------------|
| 160 | 1. מושגי יסוד                               |
| 161 | 2. חקירת פולינום                            |
| 162 | 3. חקירת פונקציה רציונלית                   |
| 166 | 4. חקירת פונקציה מעריכית                    |
| 169 | 5. חקירת פונקציה לוגריתמית                  |
| 173 | 6. חקירת פונקציה עם שורשים                  |
| 174 | 7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט |
| 177 | 8. חקירת פונקציה טריגונומטרית               |
| 181 | 9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות      |
| 183 | 10. חקירת פונקציה – שאלות כלליות            |
| 188 | 11. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה   |

## הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים :
  - תחום הגדרה ורציפות.
  - נקודות חיתוך עם הצירים.
  - זוגיות ואי-זוגיות.
  - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
  - תחומי עלייה וירידה.
  - נקודות קיצון.
  - תחומי קמירות וקעירות.
  - נקודות פיתול.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינוכית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

## חקירת פולינום

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

## תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $9$ .

נקודות קיצון: מינימום:  $(9, 0)$ , מקסימום:  $(3, 108)$ .

תחום עלייה:  $x > 9$  or  $x < 3$ , ירידה:  $3 < x < 9$ .

תחום קמירות:  $x > 6$ , קעירות:  $x < 6$ .

נקודת פיתול:  $(6, 54)$ .

(2) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $2$ .

נקודות קיצון: מינימום:  $\left(1.5, \frac{-27}{16}\right)$ .

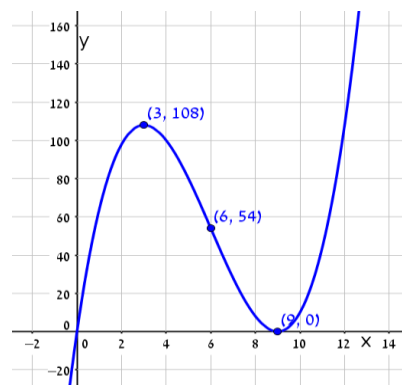
תחום עלייה:  $x > 1.5$ , ירידה:  $x < 1.5$ .

תחום קמירות:  $x > 1$  or  $x < 0$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .

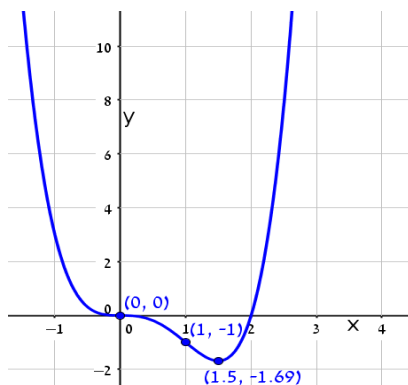
נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ .

## גרפים

(1)



(2)



## חקירת פונקציה רציונלית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

### הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת  $y = x - 1$ .

## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2, 0.25)$ . נקודת פיתול:  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 2$ , ירידה:  $x > 2$  or  $x < 0$ .  
תחום קמירות:  $x > 3$ , קעירות:  $0 < x < 3$  or  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=-1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=2$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, 0)$ . נקודת פיתול:  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 0$ , ירידה:  $-1 < x < 0$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < \frac{1}{2}$  or  $x < -1$ , קעירות:  $x > \frac{1}{2}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת: הישר  $y=x$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$ , מקסימום:  $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$ .  
תחום עלייה:  $x < -\sqrt{12}$  or  $x > \sqrt{12}$ , ירידה:  $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$ ,  $x \neq \pm 2$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-2 < x < 0$  or  $x > 2$ , קעירות:  $0 < x < 2$  or  $x < -2$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=-1$ , משופעת: הישר  $y=x-2$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x < -3$  or  $x > -1$ , ירידה:  $-3 < x < -1$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $-1 < x < 0$  or  $x < -1$ .

(5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$ .

אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .

נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

נקודות פיתול:  $(-1, 0)$ ,  $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$ .

תחום קמירות:  $-3 < x < -1$  &  $x > 1$ , קעירות:  $-1 < x < 1$  or  $x < -3$ .

(6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ ,  $x \neq 5$ . זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{10}$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .

אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=5$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .

נקודות קיצון: מקסימום:  $(2.78, -3.88)$ , מינימום:  $(0.36, -0.11)$ .

תחום עלייה:  $0.36 < x < 2$  or  $2 < x < 2.78$ ,

ירידה:  $x < 0.36$  or  $2.78 < x < 5$  or  $x > 5$ . נקודת פיתול:  $(-1, 0)$ .

תחום קמירות:  $-1 < x < 2$  or  $x > 5$ , קעירות:  $2 < x < 5$  or  $x < -1$ .

(7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{3}{4}$ , עם ציר ה- $x$ :  $x=1$ ,  $x=3$ .

אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .

נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.

תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

נקודת פיתול:  $(0.85, -0.09)$ .

תחום קמירות:  $0.85 < x < 2$  or  $x < -2$ , קעירות:  $-2 < x < 0.85$  or  $x > 2$ .

(8) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ .

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .

אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר  $x=-1$ .

נקודות קיצון: מקסימום:  $(-2, -4)$ , מינימום:  $(0, 0)$ .

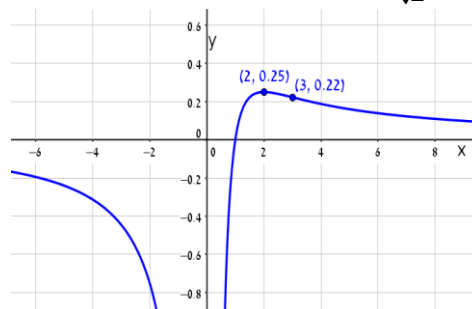
תחום עלייה:  $x < -2$  or  $0 < x < 1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $-2 < x < -1$ .

נקודת פיתול: אין.

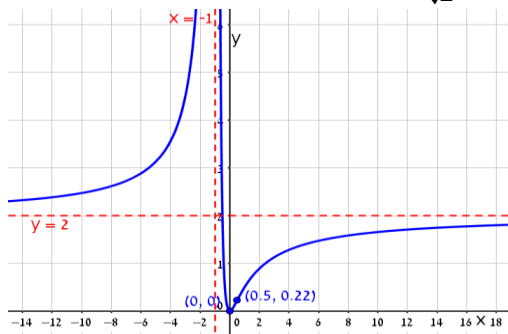
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$  or  $x > 1$ , קעירות:  $x < -1$ .

## גרפים

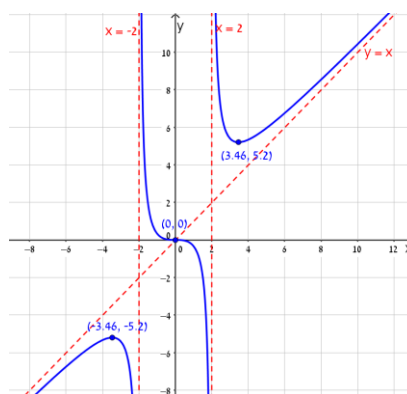
(1)



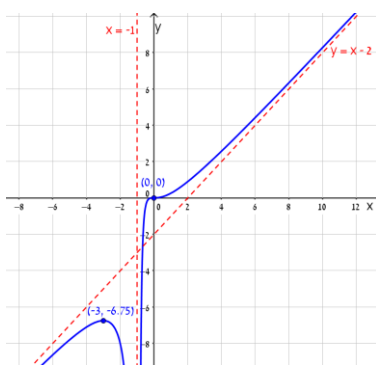
(2)



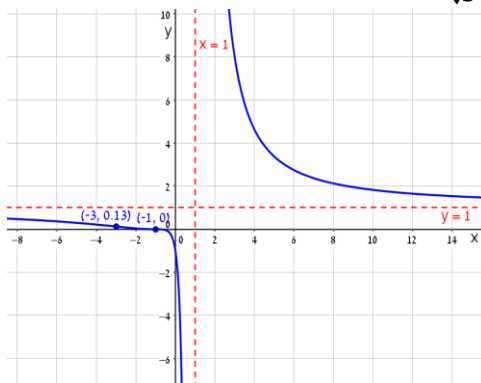
(3)



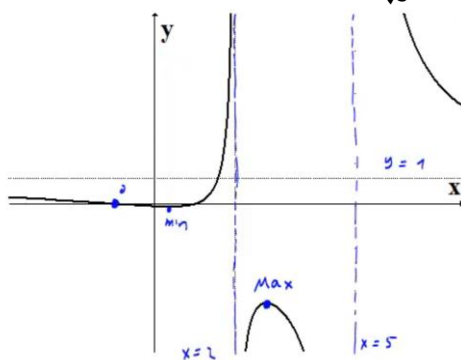
(4)



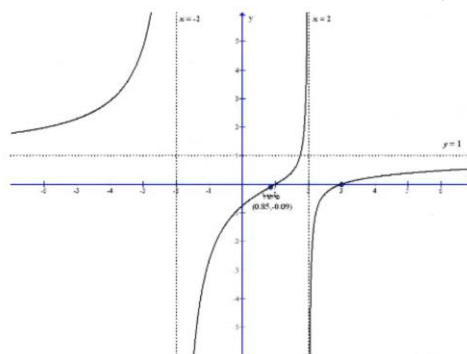
(5)



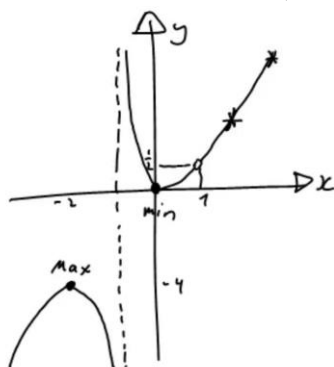
(6)



(7)



(8)



## חקירת פונקציה מעריכית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

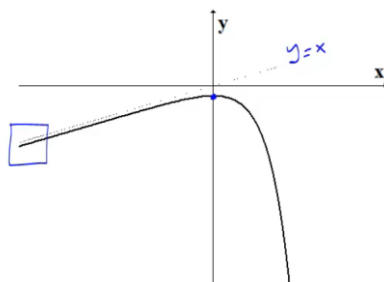


## תשובות סופיות

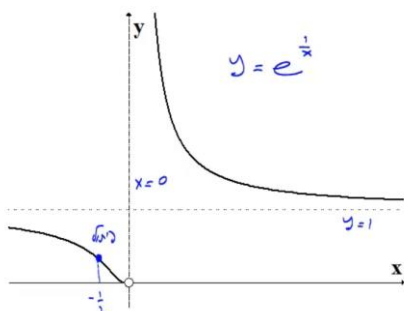
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ : אין (ראו בהרחבה בסרטון).  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר  $y = x$  ב- $-\infty$  בלבד.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, -1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .  
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל  $x$ .  
(2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין.  
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(-0.5, e^{-2})$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$  or  $-0.5 < x < 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.5$ .  
(3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $-2$ .  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x = 0$ , משופעת: הישר  $y = x + 3$  ב- $\pm\infty$ .  
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, e^{-1})$ , מינימום:  $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $x > 2$  or  $x < -1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $0 < x < 2$ .  
נקודת פיתול:  $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$  or  $-0.4 < x < 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.4$ .  
(4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר  $y = 0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ , מינימום:  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ , ירידה:  $x > \frac{1}{2}$  or  $x < -\frac{1}{2}$ .  
נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ ,  $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ .  
תחום קמירות:  $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$  or  $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$ , תחום קעירות:  
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$  or  $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$ .

## גרפים

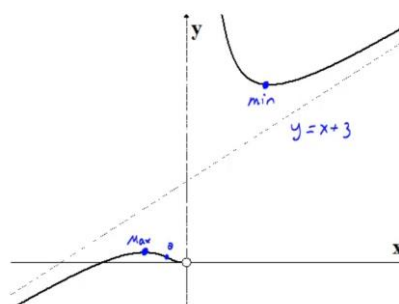
(1)



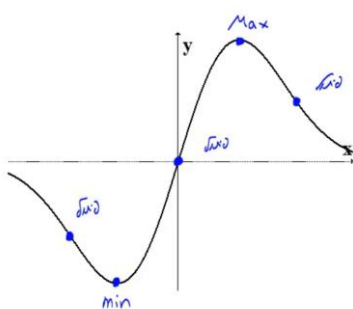
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה לוגריתמית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

### הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

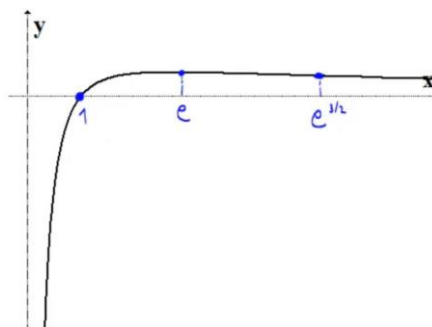
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ .  
 תחום עלייה:  $0 < x < e$ , ירידה:  $x > e$ .  
 נקודת פיתול:  $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$ .  
 תחום קמירות:  $x > e^{1.5}$ , קעירות:  $0 < x < e^{1.5}$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר  $x = 0$ ,  
 משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$ .  
 תחום עלייה:  $0 < x < e^2$ , ירידה:  $x > e^2$ .  
 נקודת פיתול:  $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt[8]{e^3}}\right)$ . תחום קמירות:  $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$ , קעירות:  $x > e^{\frac{8}{3}}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x < 2$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{2} \ln 2$ , עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ , משופעת: אין.  
 נקודות קיצון: אין.  
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.  
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -e^{-1})$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

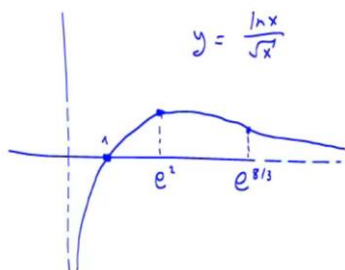
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^1$ ,  $x = e^{-3}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(1, -3)$ . תחום קמירות:  $x > 1$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^{1.5}$ ,  $x = e^{-0.5}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{\frac{1}{2}}$ , ירידה:  $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$ .  
 נקודת פיתול:  $(e^{1.5}, 0)$ . תחום קמירות:  $0 < x < 1.5$ , קעירות:  $x > 1.5$ .
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 1$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, 2)$ ,  $(e, 2)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e$  or  $e^{-1} < x < 1$ , ירידה:  $1 < x < e$  or  $x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(5.15, 3.06)$ .  
 תחום קמירות:  $1 < x < 5.15$  or  $0 < x < 1$ , קעירות:  $x > 5.15$ .

## גרפים

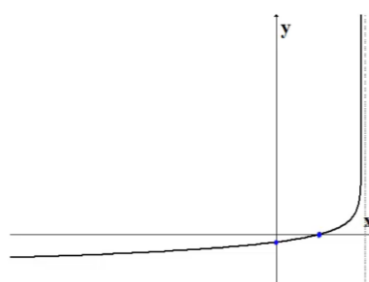
(1)



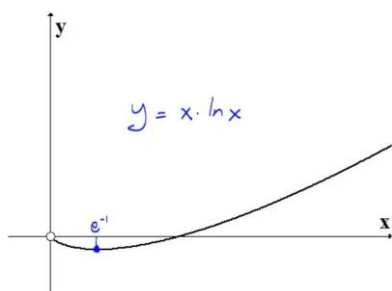
(2)



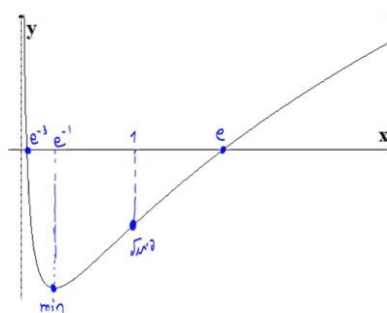
(3)



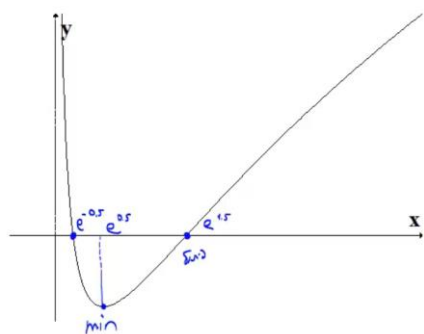
(4)



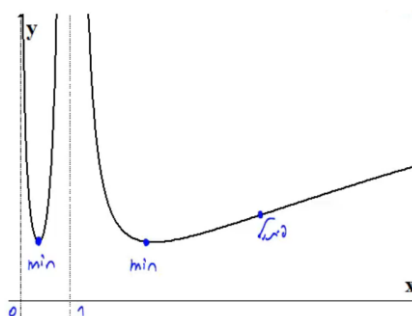
(5)



(6)



(7)



## חקירת פונקציה עם שורשים

### שאלה

(1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

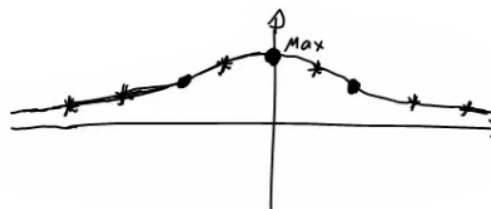
### תשובה

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = 1$ , עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית:  $y = 0$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(0,1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .

נקודות פיתול:  $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$ .

תחום קמירות:  $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$  or  $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , קעירות:  $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

גרף:



## חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

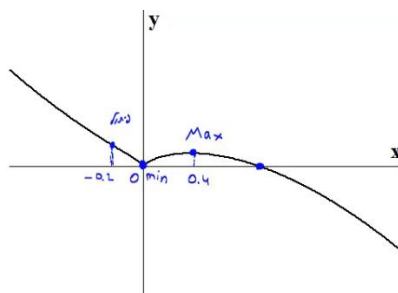


## תשובות סופיות

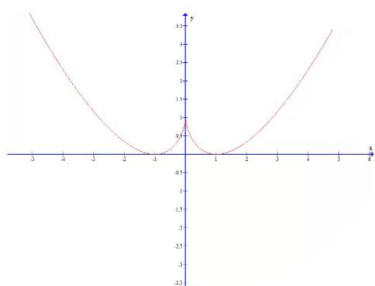
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$ , מינימום:  $(0, 0)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < \frac{2}{5}$ , ירידה:  $x < 0$  or  $x > \frac{2}{5}$ .  
נקודות פיתול:  $(-0.2, 0.41)$ .  
תחום קמירות:  $x < -0.2$ , קעירות:  $-0.2 < x < 0$  or  $x > 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, 1)$ , מינימום:  $(-1, 0)$ .  
תחום עלייה:  $-1 < x < 0$  or  $x > 1$ , ירידה:  $x < -1$  or  $0 < x < 1$ .  
נקודות פיתול: אין.  
תחום קמירות: קמורה לכל  $x$ .  
תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: זוגית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, -1)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $x < -1$  or  $-1 < x < 0$ .  
נקודות פיתול:  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$ , קעירות:  $x > 1$  or  $x < -1$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1.5$ , עם ציר ה- $x$ :  $3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ ,  
משופעת ואופקית: הישר  $y = 1$  ב- $\infty$ , ו- $y = -1$  ב- $-\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(3, 0)$ .  
תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $2 < x < 3$  or  $x < 2$ .  
נקודות פיתול:  $(3, 0)$ .  
תחום קמירות:  $2 < x < 3$ , קעירות:  $x > 3$  or  $x < 2$ .

## גרפים

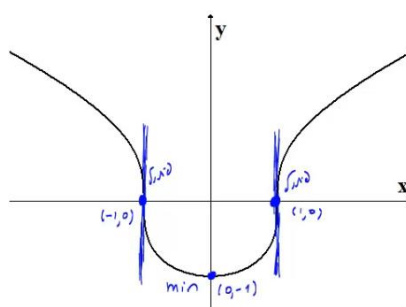
(1)



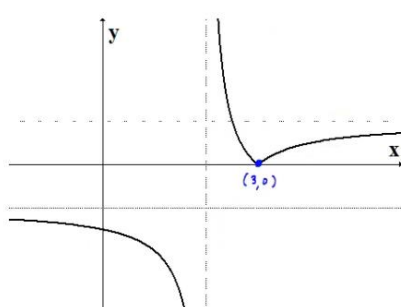
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה טריגונומטרית

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2\cos x$  בתחום  $[0, 2\pi]$ .

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x - 3\tan x$  בתחום  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$  בתחום  $[0, \pi]$ .

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$  בתחום:  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה:  $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$  בתחום הנתון?

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ .

- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום  $[0, \pi]$ .
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום  $[-\pi, \pi]$ .

(7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$  בתחום:  $-0.25\pi < x < 0.25\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

(8)  $f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3$ ,  $[0, 2\pi]$

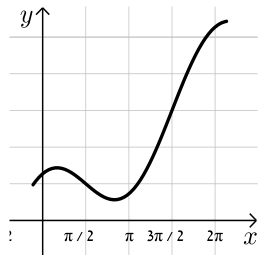
(9)  $f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x$ ,  $[0, \pi]$

## תשובות סופיות

(1) א.  $0 < x < 2\pi$ .

ב.  $\max(2\pi, 2\pi + 2)$  קצה,  $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ ,  $\min(0, 2)$  קצה.

ג. תחומי עלייה:  $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ .



ד.  $(0, 2)$ . ה. אין. ו.  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ,

קעירות כלפי מטה:  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

(2) א.  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .

ב.  $\min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right)$  קצה,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$ ,  $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$  קצה.

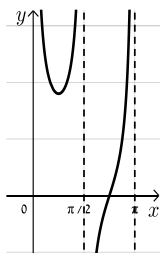
ג. תחומי עלייה:  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .



ד.  $(0, 0)$ . ה. אנכית:  $x = \frac{\pi}{2}$ . ו.  $(0, 0)$ .

ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  או  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$ ,

קעירות כלפי מטה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .



(3) א.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . ב.  $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ .

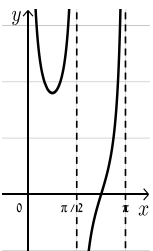
ג. תחומי עלייה:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ , תחומי ירידה:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ .

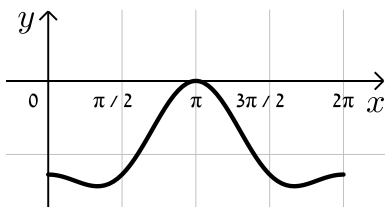
ד.  $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ . ה. אנכית:  $x = \pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ .

(4) א.  $(\pi, 0), (0, -2)$ .

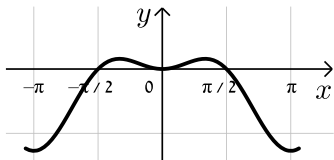
ב.  $\max\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right)$ ,  $\max(2\pi, -2)$ ,  $\max(0, -2)$ ,  $\min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$ ,  $\max(\pi, 0)$ .

ג. עולה:  $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ ,  $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ , יורדת:  $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{3}$ . גרף:

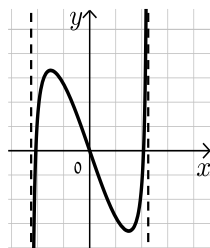




- 5 א.  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), (0, 1)$   
 ב.  $(0, 1), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), \left(\frac{5\pi}{6}, -1.29\right), (1.5\pi, 0)$   
 ד. 2 פתרונות.

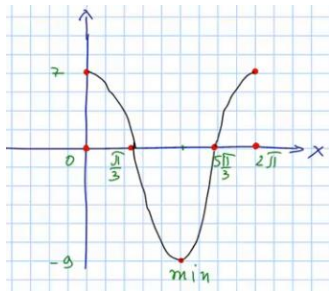


- 6 א. חיתוך:  $(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , קיצון:  $\min(\pi, -2)$  קצה,  
 $\min(0, 0), \max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$  קצה.



- 7 א.  $(0, 0), (\pm 0.23\pi, 0)$  ב.  $x = \pm 0.25\pi$   
 ג.  $\min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$ .

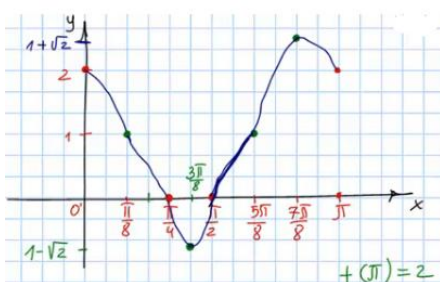
- 8 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 7, עם ציר ה-x:  $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}, x = 7$   
 נקודות קיצון: מינימום:  $(\pi, -9)$ , מקסימום:  $(0, 7), (2\pi, 7)$ .



- נקודות פיתול:  $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$   
 תחום קמירות:  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$   
 קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{3}$  or  $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$   
 תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $x < 2$  or  $2 < x < 3$ .

- 9 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 2, עם ציר ה-x:  $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$

- נקודות קיצון: מינימום:  $\left(\frac{3\pi}{8}, 1 - \sqrt{2}\right)$ , מקסימום:  $\left(\frac{7\pi}{8}, 1 + \sqrt{2}\right)$   
 תחום עלייה:  $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$ , ירידה:  $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$  or  $0 < x < \frac{3\pi}{8}$



- נקודות פיתול:  $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{8}, 1\right)$   
 תחום קמירות:  $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$   
 קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{8}$  or  $\frac{5\pi}{8} < x < \pi$

## חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

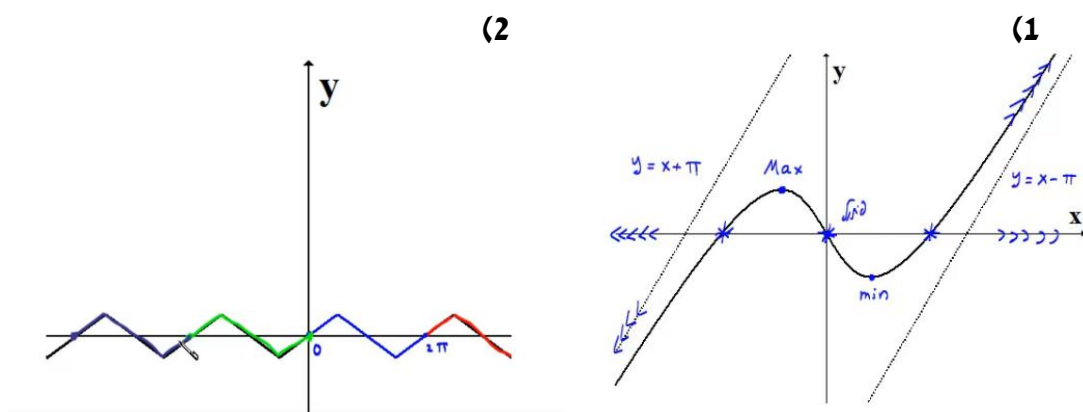
$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (2)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (1)$$

## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ .  
 אסימפטוטה אנכית: אין,  
 משופעת: הישר  $y = x + \pi$  ב- $-\infty$ , אופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, 0.575)$ , מינימום:  $(1, -0.575)$ .  
 תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 1$ .  
 נקודות פיתול:  $(0, 0)$ .  
 תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית.  
 מחזוריות: כן, ממחזור  $2\pi$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $x = 0, \pi, 2\pi$ .  
 אסימפטוטה אנכית: אין,  
 משופעת: הישר  $y = x + \pi$  ב- $-\infty$ , אופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , מינימום:  $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ .  
 תחום עלייה:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  or  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , ירידה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ .  
 נקודות פיתול: אין.

## גרפים





## חקירת פונקציה – שאלות כלליות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ , וידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת קיצון. מצאו את הקבוע  $a$ .

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ , וידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת קיצון. מצאו את הקבועים  $a, b$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ , וידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת פיתול. מצאו את הקבוע  $a$ .

(4) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ , וידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת פיתול. מצאו את הקבועים  $a, b$ .

(5) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = 3$  הוא 33. מצאו את  $a$ .

(6) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(3, 9)$  הוא 12. מצאו את  $a, b$ .

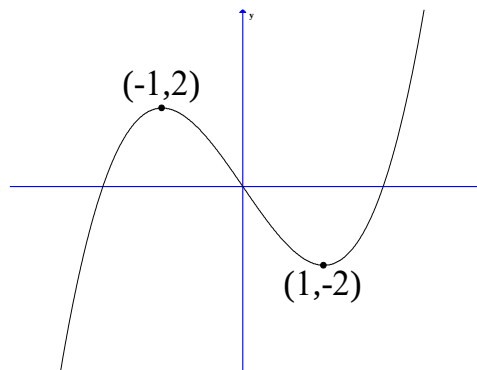
(7) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$ . ידוע שהישר  $y = 4$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את  $a$ .

(8) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$ . ידוע שהישר  $y = 0.5x + 1$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את  $a$  ואת  $b$ .

(9) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$ .

ידוע שהישר  $x=1$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה.  
מצאו את  $a$ .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$ :



(10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$ ?

(11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$ ?

(12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$ ?

(13) עבור איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק פתרון אחד?

(14) עבור איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שני פתרונות?

(15) עבור איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שלושה פתרונות?

(16) האם קיים ערך של  $k$ , עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון?

(17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

(18) נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f'(2) = 4$ .

נגדיר פונקציה חדשה  $z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

א. חשבו  $z'(0.5)$ .

ב. נתון בנוסף כי  $f$  עולה. הוכיחו כי  $z$  יורדת.

**(19)** נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = e$ .

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{x}$$

נגדיר פונקציה חדשה

א. האם  $z$  עולה או יורדת בנקודה  $x = e$ ?

ב. נתון בנוסף כי  $f$  שלילית ועולה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של  $z$ ?

**(20)** נתונה פונקציה  $f(x)$  חיובית ויורדת.

$$z(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

נגדיר פונקציה חדשה

מי מהבאים בהכרח נכון?

א.  $z$  עולה לכל  $x$ .

ב.  $z$  יורדת לכל  $x$ .

ג.  $z$  עולה לכל  $x > 0$ .

ד.  $z$  יורדת לכל  $x > 0$ .

**(21)** נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(1) = e$ .

$$g(x) = x^2 + f(\ln x)$$

נגדיר פונקציה חדשה:

א. חשבו את  $g'(e)$ .

ב. הוכיחו שהפונקציה  $g$  עולה בנקודה  $x = e$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$$

חשבו את הגבול

**(22)** הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.

ידוע שנקודת החיתוך היחידה של  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  היא ב- $x = 0$ .

$$g(x) = (f(x))^2$$

נגדיר  $g(x) = (f(x))^2$ . איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. אם  $f$  עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$  יש נקודת מינימום.

ב. אם  $f$  יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$  יש נקודת מינימום.

ג. אם  $f$  עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$  אין נקודת קיצון.

**(23)** הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת וגזירה פעמיים לכל  $x$  ומקיימת  $f''(x) = a \cdot f(x)$ , כאשר  $a < 0$ .

איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

- א. בתחום בו  $f(x)$  שלילית,  $f(x)$  קמורה (קעורה כלפי מעלה).
- ב. אם  $f(x)$  חיובית בתחום מסוים אז  $f'(x)$  יורדת באותו התחום.
- ג. אם בתחום מסוים  $f(x)$  עולה וחותכת את ציר  $x$  בנקודה  $(n, 0)$ , אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = n$  הוא המקסימלי באותו התחום.
- ד. אם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול אז  $f(x)$  שלילית בכל תחום הגדרתה.

## תשובות סופיות

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

$$\text{לא} \quad (16)$$

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

$$z'(0.5) = -16 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad (18)$$

$$\text{א. עולה.} \quad \text{ב. יורדת.} \quad (19)$$

$$\text{ד} \quad (20)$$

$$2e+1 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג.} \quad 2e+1 \quad (21)$$

$$\text{ג} \quad (22)$$

$$\text{ד} \quad (23)$$

## הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

### שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2$$

$$(2) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right), \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$$

$$(4) \quad (x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x$$

$$(5) \quad \text{נתון כי } f \text{ רציפה לכל } x \geq 0, \quad f'(x) > 0 \text{ לכל } x > 0, \text{ וכן } f(0) = 0.$$

$$\text{הוכיחו כי לכל } x > 0 \text{ מתקיים } f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x)).$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חדו"א 1 מ

פרק 12 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

תוכן העניינים

|     |                               |
|-----|-------------------------------|
| 189 | 1. נגזרת הפונקציה ההפוכה..... |
| 190 | 2. נגזרת מסדר גבוה.....       |
| 191 | 3. נוסחת לייבניץ.....         |
| 192 | 4. גזירה פרמטרית.....         |

## נגזרת הפונקציה ההפוכה

### שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)



## נגזרת מסדר גבוה

### שאלות

חשבו את הנגזרת ה- $n$ ,  $f^{(n)}(x)$ , של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x+a} \quad (1)$$

$$y = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} \quad (2)$$

$$y = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} \quad (3)$$

$$y = \frac{x^4}{x^2-1} \quad (4)$$

### תשובות סופיות

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+a)^{-n-1} \quad (1)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left( -5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1} \right) \quad (2)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left( -\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right) \quad (3)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{2} \left( (x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right), \quad y'' = 2 + \left( (x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right) \quad (4)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(-1)^n \cdot n! \cdot \left( (x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right), (n > 2)$$

## נוסחת לייבניץ

### שאלות

חשבו את הנגזרת העשירית,  $y^{(10)}$ , של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 e^x \quad (1)$$

$$y = x^3 \sin 5x \quad (2)$$

### תשובות סופיות

$$(e^x \cdot x^3)^{(10)} = e^x [x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6] \quad (1)$$

$$(\sin 5x \cdot x^3)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x \quad (2)$$

## גזירה פרמטרית

### שאלה

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{הנתונה בצורה פרמטרית}$$

### תשובה

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3} \quad (1)$$

# חדו"א 1 מ

פרק 13 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה ..... 193
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי ..... 196
3. הוכחת אי שוויונים ..... 197

## מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

---

### שאלות

בשאלות 1-7 מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$(-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2)$$

$$(-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}(20 - x) \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \quad f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$(-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = x^x \text{ בתחום } x > 0.$$

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע  $(0, 0.5)$ . הוכיחו שדני טועה.

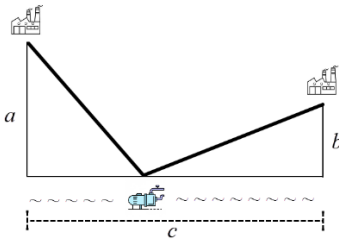
$$(9) \quad \text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה } f(x) = x^2 + |\ln x|.$$

$$(10) \quad \text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של } f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x \text{ ב-} \mathbb{R}. \text{ הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.}$$

**(11)** מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של  $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

ב-  $\mathbb{R}$  וב-  $[1, 3]$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.



**(12)** לחברת מי עדן יש שני מפעלים.

האחד מרוחק  $a$  ק"מ מהמעין.

השני מרוחק  $b$  ק"מ מהמעין.

המרחק האופקי בין המפעלים הוא  $c$  ק"מ.

החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעין

בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.

מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?

הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזווית בין כל צינור למעין שוות.

**(13)** גליל חסום בכדור.

הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי

$\sqrt{2}$  מרדיוס הבסיס שלו.

## תשובות סופיות

- (1)  $(-1, -7)$  מינימום מוחלט,  $(3, 9)$  מקסימום מוחלט.
- (2)  $(-1, 0)$  מינימום מוחלט,  $(5, 0)$  מינימום מוחלט,  $(2, 3)$  מקסימום מוחלט.
- (3)  $(0, 0)$  מינימום מוחלט,  $(20, 0)$  מינימום מוחלט,  $(8, 48)$  מקסימום מוחלט.
- (4)  $(2.5, -0.25)$  מינימום מוחלט,  $(1, 2)$  מקסימום מוחלט.
- (5)  $(-3, 1)$  מינימום מוחלט,  $(-5, 17)$  מקסימום מוחלט.
- (6)  $(-2, -4)$  מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- (7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.
- (8) א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא  $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ . ב. שאלת הוכחה.
- (9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט  $0.5(1 + \ln 2)$ .
- (10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט  $\frac{1}{2}$ .
- (11) ב-  $\mathbb{R}$ :  $(3, 0)$ ,  $(1, 0)$  מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.
- ב-  $[1, 3]$ :  $(3, 0)$ ,  $(1, 0)$  מינימום מוחלט,  $(2, 1)$  מקסימום מוחלט.
- (12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא  $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$ .
- (13) שאלת הוכחה.

## שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

### שאלות

- (1) תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$  וגזירה ב- $(a, b)$ .  
נניח שקיימת נקודה  $c \in (a, b)$  כך ש- $(f(c) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$ .  
הוכיחו כי קיימת נקודה  $d \in (a, b)$  כך ש- $f'(d) = 0$ .
- (2) פונקציה  $f(x)$  גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ .  
וידוע כי  $f(x)$  מקיימת  $f(x) - f'(x) = f''(x)$  לכל  $x$ , וכן  $f(a) = f(b) = 0$ .  
הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x$  בקטע.
- (3) הפונקציה  $f$  גזירה פעמיים ומקיימת  $f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$  עבור פונקציה  $g$  מסוימת.  
הוכיחו: אם הפונקציה  $f$  מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.
- (4) תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$  וגזירה פעמיים בקטע  $(a, b)$ , כך ש-  
 $f''(x) < 0$  בקטע זה.  
נתון כי  $f(a) = f(b) = 0$ .  
א. הוכיחו כי  $f(x) > 0$  בקטע  $(a, b)$ .  
ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

### תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.



## הוכחת אי שוויונים

---

### שאלות

בשאלות 1-3 הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

$$(1) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (\text{לכל } x)$$

$$(2) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1, \quad (x \geq 0)$$

$$(3) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1, \quad (x \leq 1)$$

(4) יהיו  $a$  ו- $b$  מספרים חיוביים. הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1) \quad a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad (2) \quad b(1-a) > \frac{1}{4}$$

**הערת סימון:**  $[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$  ;  $(a, b) \Leftrightarrow a < x < b$  ;  $[a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חדו"א 1 מ

פרק 14 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| 198 | 1. הסבר כללי על בעיות קיצון       |
| 199 | 2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים  |
| 200 | 3. בעיות קיצון בהנדסת המישור      |
| 204 | 4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים   |
| 208 | 5. בעיות קיצון בהנדסת המרחב       |
| 210 | 6. בעיות קיצון עם תשובה נתונה     |
| 211 | 7. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון |
| 216 | 8. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני   |

## שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ-  $x$ .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות  $x$ .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה-  $x$ .
- נוודא שערך ה-  $x$  מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "  $y$  (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

## בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

### שאלות

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
  - א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
  - ב. כיצד תשתנה התוצאה, אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
  - ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (4)  $x$  ו- $y$  הם שני מספרים המקיימים:  $x + 6y = 60$ .
  - א. הביעו את  $y$  באמצעות  $x$ .
  - ב. מה צריכים להיות המספרים  $x$  ו- $y$ ,
  - כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
  - ג. מהי המכפלה הנ"ל?

### תשובות סופיות

- (1) 8,8,8
- (2) 1
- (3) א. 12,12,12      ב. 8,12,16      ג. מקרה א'.
- (4) א.  $y = 10 - \frac{x}{6}$       ב.  $x = 30, y = 5$       ג.  $M = 22500$

## בעיות קיצון בהנדסת המישור

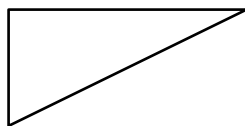
### שאלות

(1) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

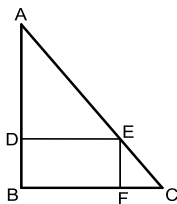
(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם  $a$ , מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

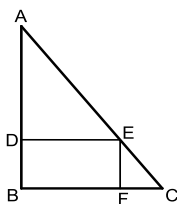
ב. הוכיחו: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



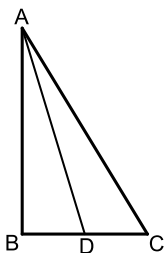
(3) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



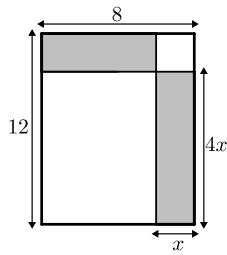
(4) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ), הנקודה  $E$  נמצאת על היתר  $AC$ , כך שהמרובע  $EDBF$  הוא מלבן. נתון:  $AB = 20$  ס"מ,  $BC = 16$  ס"מ. מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



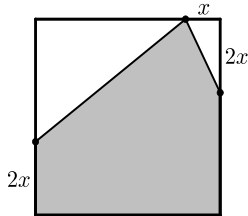
(5) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ), הנקודה  $E$  נמצאת על היתר  $AC$ , כך שהמרובע  $EDBF$  הוא מלבן. נתון:  $AB = a$ ,  $BC = b$ . מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



(6) במשולש ישר הזווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ),  $AD$  הוא תיכון לניצב  $BC$ . ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים, עבורם אורך התיכון  $AD$  יהיה מינימלי.

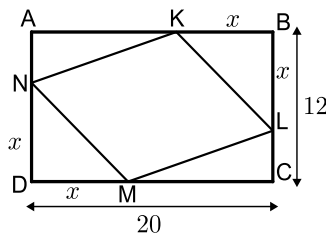


- 7 נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור.  
מקצים קטעים באורכים של  $x$  ו- $4x$  על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים. מצאו את  $x$ , עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

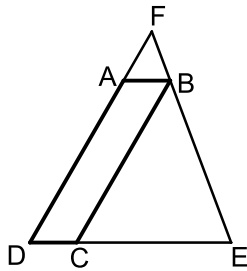


- 8 נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע שאורכו  $x$  על הצלע העליונה, ושני קטעים שאורכם  $2x$  על הצלעות הצדדיות, כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו. מצאו מה צריך להיות ערכו של  $x$ , עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.

- 9 הנקודות K, L, M ו-N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD, כך ש:



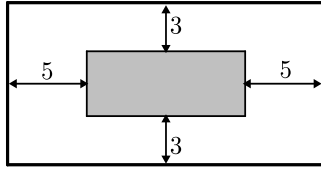
- $BK = BL = DM = DN = x$ .  
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.  
א. הביעו באמצעות  $x$  את סכום שטחי המשולשים  $\triangle AKN + \triangle KBL + \triangle CLM + \triangle DNM$ .  
ב. מצאו מה צריך להיות  $x$ , כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.  
ג. מהו השטח של המרובע LKNM, במקרה זה?



- 10 המרובע ABCD הוא מקבילית.  
מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF, הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD. ידוע כי מידות המקבילית הן:  
 $AB = m$ ,  $AD = 8$  ס"מ.  
נסמן את אורך הצלע DE ב- $x$ .  
א. הביעו באמצעות  $x$  את אורך הצלע DF.  
ב. מצאו את  $x$ , עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.  
ג. מה הוא הסכום המינימלי?

**11)** חיים הוא אחד מעובדי חברת 'דפוס יהלום בע"מ'.

תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי, כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

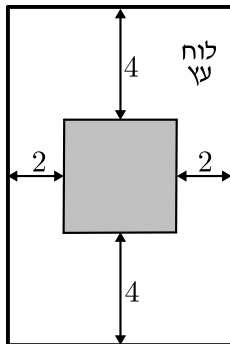


יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי, ששאל אותו את השאלה הבאה:  
"יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות, אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.

מה הן המידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?



**12)** אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:

יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ,

ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר,

כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ,

ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור).

כדי לבחור את מידות לוח העץ,

אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי

שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).

א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

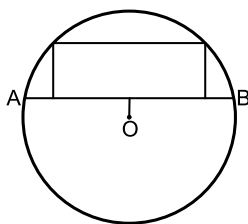
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

**13)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו  $10\sqrt{5}$  ס"מ העבירו

מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

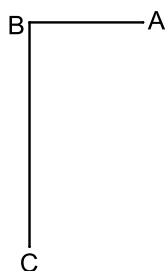


**14)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB

שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



**15)** שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדרכם:

האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.

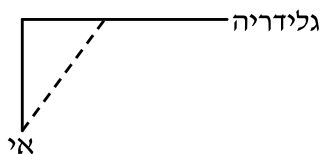
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.

מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש

ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.

כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?

מצאו גם את המרחק המינימלי.



16) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות, כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



17) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר, ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

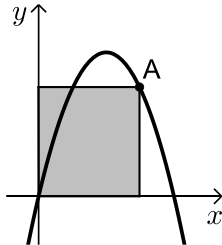
### תשובות סופיות

- 1)  $4\sqrt{3}$  ס"מ.
- 2) א. 2.5 ס"מ.
- 3) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר. ג.  $6\sqrt{2} \approx 8.48$  ס"מ.
- 4) 80 סמ"ר  $S$ .
- 5)  $\frac{ab}{4}$  יחידות שטח.
- 6) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- 7)  $x = 2.75$
- 8)  $x = 6$
- 9) א.  $2x^2 - 32x + 240$  ב.  $x = 8$  ג. 128 סמ"ר  $S$ .
- 10) א.  $DF = \frac{8x}{x-2}$  ב.  $x = 6, L = \frac{x^2 + 6x}{x-2}$  ג.  $L = 18$
- 11) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ. ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.
- 12) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ. ב.  $S = 98$
- 13) 92 ס"מ.
- 14)  $2\sqrt{5}R - 2a$  יחידות אורך.
- 15) 4 שעות, המרחק:  $\sqrt{80}$  ק"מ.
- 16)  $2\frac{1}{3}$  ק"מ.
- 17) 4.6

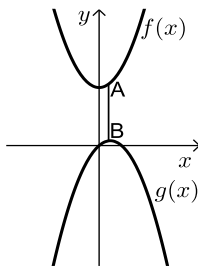


## בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

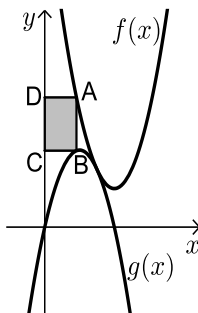
### שאלות



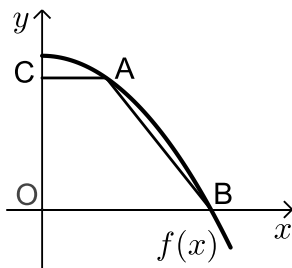
- (1) נתונה הפונקציה  $f(x) = 6x - x^2$ . מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



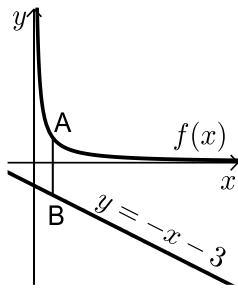
- (2) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 + 12$  ו-  $g(x) = 2x - x^2$ , כמתואר באיור. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ , בהתאמה, כך שהקטע AB מקביל לציר ה-  $y$ . מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- (3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = x^2 - 8x + 18$  ו-  $g(x) = -x^2 + 4x$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ , כך שהקטע AB מקביל לציר ה-  $y$ . נעביר אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה-  $y$ , כך שנוצר מלבן (מסומן באיור). נסמן את שיעור ה-  $x$  של הנקודה A ב-  $t$ .  
א. הביעו באמצעות  $t$  את שטח המלבן המסומן.  
ב. מצאו את ערכו של  $t$ , עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.  
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?

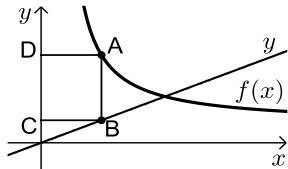


- (4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 36 - x^2$ . על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה-  $x$ , שחותך את ציר ה-  $y$  בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-  $x$ , ו-O ראשית הצירים.  
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?  
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4}{x}$ , ונתון הישר:  $y = -x - 3$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$   
והנקודה B נמצאת על גרף הישר, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .  
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(6) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$  והישר:  $y = \frac{9x}{25}$ .

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- $y$ , כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .

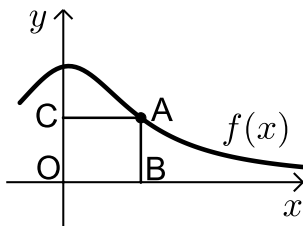
א. הביעו באמצעות  $t$  את היקף המלבן ABCD.

ב. מצאו את  $t$ , עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

(7) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  ונתון הישר  $y = 2x$ .

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן. מצאו את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

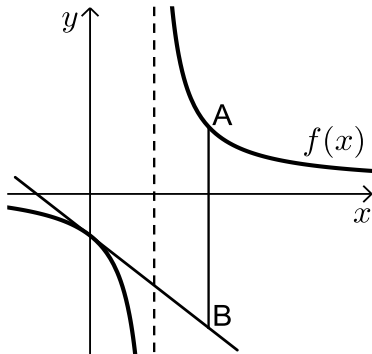


(8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$ , בתחום:  $x \geq 0$ .

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

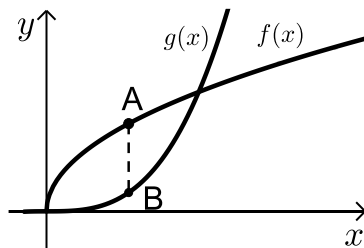
ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל?



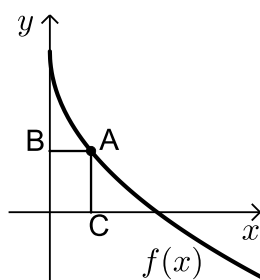
- 9** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$ . מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .
- א. מצאו את משוואת המשיק.  
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה  $f(x)$  ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
- ב. מצאו את שיעורי הנקודה A, עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.
- ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

**10** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .

מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.



- 11** נתונות הפונקציות  $f(x) = 2\sqrt{x}$  ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ .
- את הנקודה A שעל  $f(x)$  חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה, על  $g(x)$ , כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
- מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



- 12** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$ .
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C, כמתואר באיור.
- נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .
- א. הביעו באמצעות  $t$  את סכום הקטעים  $AB + AC$ .

ב. מצאו את ערכו של  $t$ , עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

**13** נתונות הפונקציות  $f(x) = 1 - x^2$  ו- $g(x) = bx^2$  ( $b > 0$ ).

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B. מצאו את ערכו של  $b$ , שבעבורו הקטע AO מינימלי (O ראשית הצירים).

## תשובות סופיות

(1)  $A(4,8)$

(2)  $A(0.5,12.25)$

(3)  $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$  א.  $t = 1$  ב.  $S = 8$  ג.

(4)  $A(2,32)$  א.  $S = 128$  ב.

(5)  $A(2,2)$

(6)  $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t - 1}$  א.  $t = 4\frac{3}{4}$  ב.  $P = 12.88$  ס"מ ג.

(7)  $1 \cdot 2$

(8)  $A(2,2)$  א.  $A(0,4)$  ב.

(9)  $y = -3x - 5$  א.  $A(4,7)$  ב.  $AB = 24$  ג.

(10)  $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

(11)  $A(1,2)$

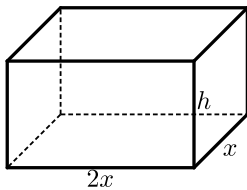
(12)  $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$  א.  $t = 2.25$  ב.

(13)  $b = 1$

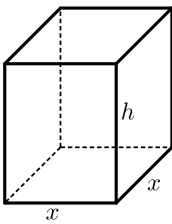
## בעיות קיצון בהנדסת המרחב

### שאלות

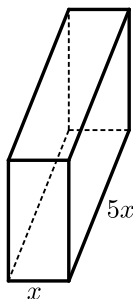
- (1) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצאו את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.



- (2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן, שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה, כמתואר באיור. ידוע כי גובה התיבה  $h$  וצלע המלבן הקטנה  $x$  מקיימים:  $x + h = 9$ . מצאו מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



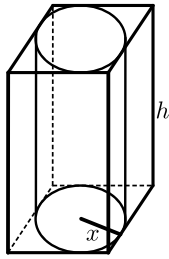
- (3) נתונה תיבה שגובהה הוא  $h$  ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא  $x$ . נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים  $4x + h = 63$ .  
א. הביעו את  $h$  באמצעות  $x$ .  
ב. הביעו את שטח הפנים של התיבה באמצעות  $x$ .  
ג. מה צריך להיות ערכו של  $x$ , כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



- (4) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת, ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש, כדי להשיג את מבוקשו. מצאו את כמות הפח המינימלית.

- (5) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה, דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

- (6) מכל הגלילים הישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא  $k$ , מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



7) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע, וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- $x$  וגובהו ב- $h$ .

ידוע כי הסכום של  $x$  ו- $h$  הוא 12 ס"מ.

א. הביעו באמצעות  $x$  את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הביעו באמצעות  $x$

1. את נפח הגליל.

2. את נפח התיבה.

ג. מצאו את  $x$ , עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.

אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא  $k$  ושטח המעטפת שלה הוא  $S$ .

הוכיחו כי  $S < 2k^2$ .

## תשובות סופיות

1) 4·4·4 ס"מ.

2) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

3) א.  $h = 63 - 4x$  ב.  $p = -14x^2 + 252x$  ג.  $x = 9$

4) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

5) 8·6·3 ס"מ.

6)  $\frac{k^3}{216\pi}$  יחידות נפח  $V$ .

7) א.  $2x$  ב. 1.  $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$  2.  $V = 48x^2 - 4x^3$  ג.  $x = 8$

8) שאלת הוכחה.

## בעיות קיצון עם תשובה נתונה

### בעיות קיצון בהנדסת המרחב

- (1) נתונים שני מספרים חיוביים,  $p$  ו- $q$ , שסכומם  $a$ .  
הראו, שכאשר מתקיים  $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ , ערך הביטוי  $p^n q^m$  מקסימלי (כאשר  $n$  ו- $m$  טבעיים).

- (2) הוכיחו שמכל החרוטים הישרים שנפחם  $\pi k$  סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו  $\sqrt[3]{6k}$  ס"מ.  
(שטח מעטפת של חרוט הוא  $\pi Rl$ , כאשר  $l$  הוא הקו היוצר של החרוט)

### בעיית קיצון עם תנועה

- (3) מהירותו של רכב היא  $v$  קמ"ש ועליו לנסוע דרך של  $S$  ק"מ.  
לרכב יש הוצאות נסיעה של  $\frac{v}{400}$  ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200} + 48$  ₪ לכל שעת נסיעה.  
הראו שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

### שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת  $x$  ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של  $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$  שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא  $p(x) = -0.6x + 120$ .

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם  $x = 20$ , מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא  $R(x) = -0.08x^2 + 40x$ .

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא  $p(x) = -0.4x + 100$ .

- מצאו את תחום הפונקציה.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של  $x$  יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא  $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$ .

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם  $x = 40$ , האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?



6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י  $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$ .

- מצאו את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
- מהו הביקוש במקרה זה?
- מהו הביקוש השולי בנקודת מחיר זו? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר  $x$  קפה ביום, היא  $C(x) = 5x + 150$ .

- שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
- מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.
- מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?
- מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא  $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$  שקל ליום.

- חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.
- כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
- חשבו את העלות השולית ליום, עבור  $x = 100$ . איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא  $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$ .

- חשבו את העלות, כאשר  $x = 100$  וכאשר  $x = 101$ .
- חשבו את העלות השולית, כאשר  $x = 100$ .
- חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$  ל- $x = 101$ , והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
- מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש  $P(Q) = 100 - 0.06Q$ ,

ופונקציית עלות כוללת  $TC(Q) = 200 + 4Q$ .

מהי הכמות  $Q$  שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש  $P(Q) = 20$ , ופונקציית עלות  $TC(Q) = 300 + 2Q^2$ .

מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?

**12** ליצרן פונקציית ביקוש  $P(Q) = -0.15Q + 50$ ,  
 ופונקציית עלות שולית  $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$ .  
 מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

**13** ליצרן פונקציית ביקוש  $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$ ,  
 ופונקציית עלות  $TC(Q) = 200 + 4Q$ .  
 מהי הכמות  $Q$  שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?  
 מהו המקסימום במקרה זה?

**14** ליצרן פונקציית עלות שולית  $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$ .  
 מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא  $Q = 10$ ,  
 העלות הכוללת היא 225 ₪.

**15** הוכיחו:

- שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבירו את המשמעות הגרפית.
- שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

**16**  $C(x)$  – פונקציית הוצאות,  $C'(x)$  – הוצאות שוליות,  $\frac{C(x)}{x}$  – הוצאות ממוצעות.

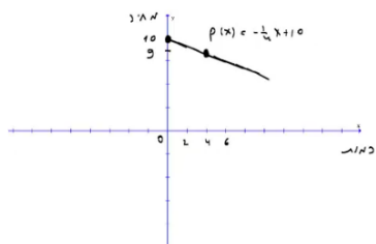
- האם יתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
- האם יתכן להפך?
- הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

**17** מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי ייצור. נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב-  $p_1$  וב-  $p_2$ , בהתאמה. אם משתמשים ב-  $x$  יחידות מג"י 1 וב-  $y$  יחידות מג"י 2, המפעל מייצר  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  יחידות. תקציב המפעל  $A$  ₪.  
 א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}.$$

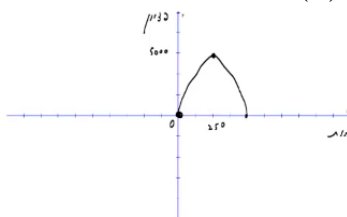
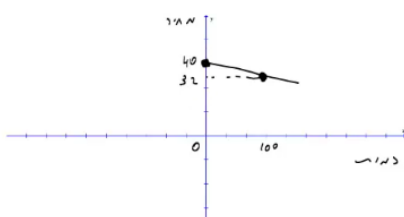
- חשבו את  $x$  ו-  $y$  עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:  
 $p_1 = 100$  ₪,  $p_2 = 3,000$  ₪,  $A = 372,000$  ₪.

## תשובות סופיות



(1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה.  $x(p) = 40 - 4p$  ד.

(2) א.  $R(x) = -0.6x^2 + 120x$ , בתחום:  $x \geq 0$  ב. 2,160 ג. 2,160



(3) א.  $x \geq 0$  ב. ג.

(4) א.  $x \geq 0$  ב. פונקציית הפדיון:  $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע:  $AR(x) = -0.4x + 100$ ,  $x > 0$  ג.  $R'(x) = -0.08x + 100$  ד. 1,250 ; הפדיון המקסימלי: 62,500

(5) א. פונקציית הפדיון:  $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

הפדיון השולי:  $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$  ב. לא ג. 30 ; הפדיון המקסימלי: 108,000

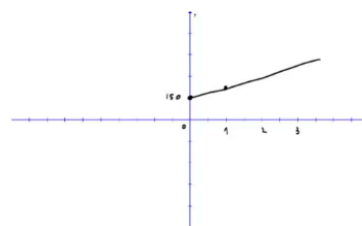
(6) א.  $33\frac{1}{3}$  ב.  $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג.  $-3\frac{1}{3}$  ; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

(7) א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל,

גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד.  $MC(x) = 5$



(8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

(9) א.  $C(100) = 1240$ ,  $C(101) = 1250.804$  ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

(10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200

(11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

(12) 25

(13) הכמות: 800, המקסימום: 38,200

$$TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5 \quad (14)$$

(15) שאלת הוכחה.

(16) א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

(17) א. שאלת הוכחה. ב.  $x = 4, y = 3600$

## בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

### שאלות

- 1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של \$225 למכונה. עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא \$125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של \$5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.
  - א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?
  - ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.
- 2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות. בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.
  - א. לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית (כלומר, מה המחיר שיש לקבוע ולכמה דקות)?
- 3) אמן מייצר תכשיטים בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט. הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט. על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.
  - א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.
  - ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?
  - ג. מהי עלות הייצור של האמן במצב זה (עבור כל התכשיטים)?
- 4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.
  - א. מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?
- 5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג', ומספר ה-SMS החודשי הממוצע הוא 200. על כל 5 אג' ש'סלקום' מעלה – יורד מספר ה-SMS החודשי הממוצע בעשר. מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS, כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.

- 6) קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.  
מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה הגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.
- 7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪. אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום. על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום.  
מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?
- 8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪. 5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר, ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר. הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.
- 9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים במחיר של 500 ₪ לזוג אופניים. לכל  $x$  זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$  ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- $x$  ₪ לזוג אופניים.  
מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

## תשובות סופיות

- 1) א. 200 ב. \$93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.  
2) 70 ₪ ל-350 דקות.  
3) א. 60 ב. 60 ג. 1,800 ₪  
4) 40  
5) 75 אג'.  
6) מחיר הכרטיס : 30 ₪, ההכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.  
7) 4,500 ₪.  
8) שאלת הוכחה.  
9) 350

# חדו"א 1 מ

פרק 15 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה ..... 218
2. פתרון משוואות פולינומאליות ..... 221
3. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות ..... 223

## מציאת מספר הפתרונות של משוואה

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואות יש בדיוק פתרון אחד :

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4)$$

(5) נתונה המשוואה  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , ונתון כי  $b^2 < 3ac$ . מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות 6-9, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה :

$$e^{x-1} = x \quad (6)$$

$$\arctan x - x = 0 \quad (7)$$

$$\ln(x+5) - 4 = x \quad (8)$$

$$x^2 + x \sin x = 1 - \cos x \quad (9)$$

(10) תהי  $f$  פונקציה גזירה לכל  $x$ , המקיימת:  $f'(x) \leq 1$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ . הוכיחו שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש בדיוק פתרון אחד.

הוכיחו שלמשוואות בשאלות 11-13 יש בדיוק שני פתרונות :

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (13) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (12) \quad e^x - 5x = 0 \quad (11)$$



בכל אחת מהמשוואות 14-17, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (14)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (15)$$

$$x + a \cos(bx) = 1 \quad (16)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (17)$$

(18) מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה  $a^2x + e^x = a$  כאשר  $a$  קבוע ממשי.

(19) הוכיחו שלמשוואה  $2ax^3 + a^2 + x^2 = 0$  קיים פתרון אחד ויחיד כאשר  $a$  קבוע ממשי.

(20) הוכיחו שלמשוואה  $x^2 + x^3 + 5x = 1$  יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.  
הערה: שאלה זו יש לפתור תוך שימוש במשפט רול.

(21) נתון הפולינום  $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + cx - 1$ .  
א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.  
ב. נתון בנוסף כי  $|c| < 1$ .  
מה מספר השורשים של הפולינום?

### תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) פתרון יחיד.
- (6)  $x = 1$
- (7)  $x = 0$
- (8)  $x = -4$
- (9)  $x = 0$
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14)  $b^2 - 4ac = 0$
- (15)  $4b^2 - 12ac < 0$
- (16)  $\frac{1}{ab} < -1, \frac{1}{ab} > 1$
- (17)  $b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$
- (18) אם  $a = 0$ , למשוואה אין פתרון. אם  $a \neq 0$ , למשוואה יש פתרון יחיד.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.

## פתרון משוואות פולינומאליות

### שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות 1-3 :

$$(1) \quad \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$$

$$(2) \quad \frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10}$$

$$(3) \quad \frac{4x^2 + x - 1}{x - 2}$$

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(4) \quad k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0$$

$$(5) \quad k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0$$

$$(6) \quad k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0$$

$$(7) \quad k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$$

$$(8) \quad k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0$$

$$(9) \quad k^3 - k^2 + k - 1 = 0$$

$$(10) \quad k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0$$

$$(11) \quad 7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0$$

## תשובות סופיות

(1)  $x^2 + 1$

(2) 0

(3)  $4x + 9 + \frac{17}{x-2}$

(4)  $k_1 = 1, k_2 = -2, k_3 = 3, k_4 = -5$

(5)  $k_1 = -4, k_{2,3} = 1 \pm 2i$

(6)  $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = -1, k_5 = -1$

(7)  $k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 2$

(8)  $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1, k_5 = 1, k_6 = -1$

(9)  $k_1 = 1, k_{2,3} = \pm i$

(10)  $k_1 = 1, k_2 = 2, k_{3,4} = \pm 2i$

(11) פתרון מקורב:  $x = 0.8459$ .

## שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה 2 בשיטת ניוטון-רפסון):

$$(1) \quad 1 + 4x^4 = 8x^3$$

$$(2) \quad -4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0$$

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{פתרון מדויק } x = -1.$$

$$(2) \quad \text{פתרונות מקורבים: } x = 0.5576, \quad x = 1.9672.$$

# חדו"א 1 מ

פרק 16 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

|     |                                                   |
|-----|---------------------------------------------------|
| 224 | 1. משפט רול                                       |
| 228 | 2. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[a, b]$ |
| 230 | 3. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[o, x]$ |
| 231 | 4. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים עם מספרים     |
| 232 | 5. משפט לגראנז' - שאלות כלליות                    |
| 236 | 6. משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי                |
| 238 | 7. משפט דרבו                                      |

## משפט רול

### שאלות

- (1) בדקו האם הפונקציה הנתונה,  $f(x)$  בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי  $c$  המקיימים את מסקנת משפט רול:

א.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$   $[0, 2]$

ב.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$   $[-1, 1]$

(2) נתון ש-  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ .

- הראו ש-  $f(1) = f(5)$ , אך אין נקודה  $c$ , כך ש-  $f'(c) = 0$ .  
האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

- (3) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים ב-  $\mathbb{R}$ ,  
ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות,  $x_0, x_1, x_2$ , עבורן  $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$ .  
הוכיחו שקיים  $c$  ממשי, כך ש-  $f''(c) = 0$ .

- (4) תהי  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה 3 פעמים.  
נניח שלכל  $n$  טבעי מתקיים  $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ .  
הוכיחו שקיימת  $x_0 \in (0, 1)$ , כך ש-  $f'''(x_0) = 0$ .

- (5) תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה 3 פעמים.  
נניח שמתקיים  $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$ .  
הראו שלמשוואה  $f'''(x) = 0$  יש פתרון.

- (6) נתון כי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים.  
נתון בנוסף כי  $f$  פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב-  $x_0 = 2$ .  
הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

- (7) נתונה פונקציה  $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ .  
 תהי  $g$  מוגדרת על ידי  $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ .  
 הראו כי  $g$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , והוכיחו כי הנגזרת,  $g'$ ,  
 מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע  $(-1, 1)$ .
- (8) הוכיחו:  
 אם  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$  ו- $f(1) = 0$ , אז הפונקציה  $g(x)$ , המוגדרת על ידי  
 $g(x) = xf(x)$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ , וישנו פתרון ממשי למשוואה  $g'(x) = 0$ .
- (9) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$  ו- $f(x) > 0$  לכל  $0 < x \leq 1$ .  
 הוכיחו שקיים  $c \in (0, 1)$ , כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = 2 \frac{f'(c)}{f(c)}$ .
- (10) אם  $c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$ ,  $(c_i \in \mathbb{R})$ ,  
 הוכיחו שלמשוואה  $c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$   
 יש לפחות פתרון אחד בקטע  $(0, 1)$ .
- (11) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .  
 הראו שלמשוואה  $f'(x) = 2x$  קיים פתרון בקטע  $(0, 1)$ .
- (12) תהיינה  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות.  
 נניח שלכל  $x$  ממשי מתקיים  $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$ .  
 הראו שבין כל שני שורשים של  $f$  קיים לפחות שורש אחד של  $g$ .
- (13) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה,  
 כך ש- $f(0) = f(1) = 0$  ו- $f'(0) > 0$ ,  $f'(1) > 0$ .  
 א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.  
 ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.  
 ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע  $(0, 1)$ .



**14** ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n \text{ שלכל}$$

חשבו את  $f''(0)$ .

ב. תהי  $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים, כך ש-  $f''(0) > 0$ .

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq 1 \text{ טבעי, } n \text{ שלכל}$$

**15** תהי  $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים.

$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n \text{ שלכל}$$

חשבו את  $f''(1)$ .

**16** נתון כי  $f, g$  גזירות לכל  $x$  וכי  $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \neq 0$  ב-  $\mathbb{R}$ .

הוכיחו שלמשוואה  $f(x)g(x) = A$  יש לכל היותר פתרון אחד.

$A$  קבוע כלשהו.

**17** נתון כי  $f$  גזירה לכל  $x$  וכי  $f'(x)$  חד-חד ערכית ב-  $\mathbb{R}$ .

תהי  $x_0$  נקודה כלשהי.

הוכיחו כי לגרף של  $y = f(x)$  ולישר המשיק בנקודה  $x_0$  יש נקודה משותפת

אחת ויחידה -  $x_0$ .

במילים אחרות: הוכיחו כי הגרף של  $y = f(x)$  נמצאו כולו מעל המשיק או

מתחתיו.

**18** נתון כי  $f$  גזירה פעמיים בקטע  $(a, b)$ , ולכל  $x \in (a, b)$  מתקיים

$$(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$$

נתון שלמשוואה  $f'(x) = 0$  יש שלושה פתרונות בקטע.

הוכיחו שלמשוואה  $f(x) = 0$  יש לפחות שני פתרונות בקטע.

תנו דוגמה לפונקציה  $f$  המקיימת  $(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$ .

**19** נתון כי  $f(x), g(x)$  רציפות בקטע  $[a, b]$  וגזירות בקטע  $(a, b)$ .

נתון בנוסף כי  $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ .

הוכיחו שקיימת נקודה  $a < c < b$  כך ש-  $f'(c) = g'(c)$ .

- (20) הפונקציות  $f$  ו- $g$  רציפות ב- $[a, b]$  וגזירות ב- $(a, b)$ .  
 ידוע כי  $f(a) \geq g(a)$  ו- $f'(x) > g'(x)$  ב- $(a, b)$ .  
 הוכיחו כי  $f(x) > g(x)$  ב- $(a, b)$ .

### תשובות סופיות

- (1) א. כן,  $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$       ב. כן,  $2 - \sqrt{3}$ .  
 (2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה  $x = 3$ .  
 (14) א. 0      ב. שאלת הוכחה.  
 (15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a, b]$

### שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (3)$$

$$\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (4)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (5)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (6)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{\operatorname{arcsinh}(b) - \operatorname{arcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (7)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{1-a^2} < \operatorname{arctanh}(b) - \operatorname{arctanh}(a) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (8)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (9)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (10)$$

$$(1 < a < b < 3) \quad \ln b - \ln a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{4}(b-a) \quad (11)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (12)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (13)$$

$$(x < y) \quad |\arctan y - \arctan x| \leq |y - x| \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0, x]$

### שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x} \quad (1)$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (2)$$

$$(0 < x < 1) \quad x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arcsinh}(x) < x \quad (4)$$

$$(0 < x < 1) \quad x < \operatorname{arctanh}(x) < \frac{x}{1-x^2} \quad (5)$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (6)$$

$$(x > 0) \quad 1+x < e^x < 1+xe^x \quad (7)$$

$$(x > 0) \quad \sin x \leq x \quad (8)$$

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) \quad \tan x < 4x \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

---

### שאלות

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים :

$$\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5 \quad (2)$$

$$\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – שאלות כלליות

### שאלות

- (1) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה לכל  $x$ , המקיימת  $|f'(x)| \leq 5$ .  
ידוע כי  $f(1) = 3$ ,  $f(4) = 18$ .  
הוכיחו כי  $f(2) = 8$ .

- (2) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה לכל  $x$ , המקיימת  $|f'(x)| \leq 7$ .  
ידוע כי  $f(1) = 3$ ,  $f(4) = 18$ .  
הוכיחו כי  $4 \leq f(2) \leq 10$ .

- (3) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ , ונניח ש- $f(a) = f(b) = 0$ ,  
וכן שקיימת נקודה  $c$ , כאשר  $c \in (a, b)$ , כך ש- $f(c) > 0$ .  
הוכיחו שקיימת נקודה  $m$  בקטע  $(a, b)$ , כך ש- $f''(m) < 0$ .

- (4) תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $(a, b)$ , כך ש- $f'$  חסומה בקטע  $(a, b)$ .  
א. הוכיחו שקיים  $M > 0$ , כך שלכל  $x$  ו- $y$  ב- $(a, b)$  מתקיים:  
 $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ .  
ב. הוכיחו ש- $f$  רציפה במידה שווה ב- $(a, b)$ .  
כלומר, הוכיחו שלכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$ , כך שלכל  $x$  ו- $y$  ב- $(a, b)$ ,  
המקיימים  $|x - y| < \delta$ , מתקיים  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

- (5) נניח כי  $f$  רציפה ב- $[0, \infty)$  וגזירה ב- $(0, \infty)$ .  
כמו כן,  $f(0) = 0$ , ו- $f'$  מונוטונית עולה.  
א. הוכיחו כי  $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$  ב- $(0, \infty)$ .  
ב. הוכיחו כי  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  מונוטונית עולה ב- $(0, \infty)$ .

**(6)** תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, \infty)$  וגזירות ב- $(a, \infty)$ .  
נתון כי  $f(a) = g(a)$  ו- $f'(x) \leq g'(x)$  לכל  $x > a$ .  
הוכיחו כי  $f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \geq a$ .

**(7)** נניח כי  $f$  גזירה ב- $(0, \infty)$ .

א. נתון כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .

הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ .

ב. נתון כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0$ .

הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

**(8)** תהי  $f$  פונקציה גזירה לכל  $x$ .  
הוכח:

א. אם הגבולות  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  קיימים, אז הם שווים זה לזה.

ב. אם  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = L$  אז  $L = 0$  (ללא שימוש בכלל לופיטל).

ג. ייתכן שהגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  קיים אבל הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  לא קיים.

ד. אם הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  קיים אז גם הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  קיים ושני הגבולות שווים זה לזה.

ה. אם  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0$  (או  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) < 0$ ) אז  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  (או  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ).  
הערה: סעיף ג' הוא למעשה הכללה של סעיף א'.

**(9)** נניח כי  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ .

האם נכון לומר כי מתקיים  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ ?

הוכיחו או הפריכו.

הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז', הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

**(10)** תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)| < 1$  לכל  $0 \leq x \leq 1$ .  
הוכיחו שקיים לכל היותר  $c$  אחד ב- $[0, 1]$ , כך ש- $f(c) = c$ .

**(11)** תהי  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x) < 0$  לכל  $0 \leq x \leq 1$ .  
הוכיחו שקיים בדיוק  $c$  אחד ב- $[0, 1]$ , כך ש- $f(c) = c^2$ .



**(12)** תהי  $f$  פונקציה גזירה ב- $[a, b]$ .

הוכיחו שקיימים  $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$ , כך ש- $c_2 \neq c_3$  ו- $f'(c_1) = \frac{f'(c_2) + f'(c_3)}{2}$ .

**(13)** תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים.

נניח שהישר, המחבר את הנקודות  $(0, f(0))$  ו- $(1, f(1))$ , חותך את הגרף של  $f$  בנקודה  $(a, f(a))$ , כאשר  $0 < a < 1$ . הוכיחו שקיים  $x_0 \in [0, 1]$ , כך ש- $f''(x_0) = 0$ .

**(14)** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

נניח ש- $f$  גזירה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L$ , כאשר  $L \in \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $f'_+(a) = L$  קיים ו- $f'_+(a) = L$ .

**(15)** תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה שמקיימת  $f(0) = 0$ .

נניח שלכל  $x \in [0, 1]$  מתקיים  $|f'(x)| \leq |f(x)|$ . הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

**(16)** נתון כי  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$  וגזירה בקטע  $(a, b)$ .

א. ידוע כי  $f'(x) = 0$  לכל  $x \in (a, b)$ .

הוכיחו כי  $f$  קבועה ב- $[a, b]$ .

ב. ידוע כי  $f'(x) = m$  לכל  $x \in (a, b)$ .

הוכיחו כי  $f$  לינארית ב- $[a, b]$ .

**(17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון כי  $f, g$  רציפות בקטע  $[a, b]$  וגזירות בקטע  $(a, b)$ .

ידוע כי  $f'(x) = g'(x)$  לכל  $x \in (a, b)$ .

הוכיחו כי  $f(x) = g(x) + c$  ב- $[a, b]$ .

ב. הוכיחו כי  $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ .

**(18)** נתון כי  $f$  גזירה בקטע  $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ .

א. הוכח כי  $f'$  לא חסומה בקטע.

ב. האם בהכרח  $f'$  שואפת ל- $\infty$  או  $-\infty$ ?

## תשובות סופיות

8) ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי

---

### שאלות

(1) הוכיחו שלכל  $1 \leq a < b$  מתקיים  $n(\ln b - \ln a) < b^n - a^n$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}$ .

(2) הוכיחו כי עבור כל  $a, b$  המקיימים  $0 < a < b < 1$ ,

$$\frac{a}{1+a^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\ln b - \ln a} < \frac{b}{1+b^2} \quad \text{מתקיים}$$

(3) הוכיחו כי עבור כל  $a, b$  המקיימים  $1 < a < b$ ,

$$\frac{2\sqrt{b}}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} < \frac{2\sqrt{a}}{1+a^2} \quad \text{מתקיים}$$

(4) הוכיחו כי  $|\tan y - \tan x| \leq 8|\sin x - \sin y|$  לכל  $x, y \in [0, \frac{\pi}{3}]$ .

(5) הוכיחו כי  $\arctan x > \ln(1+x)$  לכל  $x \in (0,1)$ .

(6) הוכיחו שלכל  $x \neq 0$  מתקיים  $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x$ .

(7) תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $[0,1]$  וגזירה ב- $(0,1)$ .

הוכיחו שבקטע  $(0,1)$  קיים פתרון למשוואה  $f(1) - f(0) = \frac{f'(x)}{2x}$ .

(8) תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $[0,1]$  וגזירה ב- $(0,1)$ , ויהי  $n$  מספר טבעי כלשהו.

הוכיחו שקיים  $0 < c < 1$ , המקיים  $f(1) - f(0) = \frac{f'(c)}{nc^{n-1}}$ .

(9) יהיו  $a$  ו- $b$  מספרים חיוביים כלשהם.

הוכיחו שקיים פתרון למשוואה  $(a^3 - b^3)\cos x = 3x^2(\sin a - \sin b)$ .

**(10)** תהי  $f$  פונקציה גזירה ב- $[a, b]$ , כאשר  $a \geq 0$ .

הוכיחו שקיימים  $c_1, c_2 \in [a, b]$ , כך ש- $\frac{f'(c_1)}{a+b} = \frac{f'(c_2)}{2c_2}$ .

**(11)** תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $[a, b]$ , כאשר  $ab > 0$ .

הוכיחו שלמשוואה  $f'(x) \cdot x - f(x) = \frac{1}{b-a} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ f(a) & f(b) \end{array} \right|$  קיים פתרון בקטע  $[a, b]$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט דרבו

---

### שאלות

(1) האם קיימת פונקציה גזירה  $f$ , שמקיימת  $f'(x) = \begin{cases} 4x & x < 1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$ ?

(2) האם קיימת פונקציה גזירה  $f$ , שמקיימת  $f'(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ ?

(3) האם קיימת פונקציה גזירה  $f$ , שמקיימת  $f'(x) = \begin{cases} 4 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$ ?

(4) האם קיימת פונקציה גזירה  $f$ , שמקיימת  $f'(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases}$ ?

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, ותהי  $x_0 \in (a, b)$ .  
הוכיחו:

אם  $f'$  לא רציפה ב- $x_0$ , אז  $x_0$  היא לא נקודת אי-רציפות סליקה.

ב. האם קיימת פונקציה  $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ ,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי  $f'(x) = \begin{cases} 4 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$ ?

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, ותהי  $x_0 \in (a, b)$ .  
הוכיחו:

אם  $f'$  לא רציפה ב- $x_0$ , אז  $x_0$  היא לא נקודת אי-רציפות מסוג I.

ב. האם קיימת פונקציה  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ ,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי  $f'(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$ ?

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, ותהי  $x_0 \in (a, b)$ .

הוכיחו :

אם  $f'$  לא רציפה ב- $x_0$ , אז  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \neq \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \neq \pm\infty$ .

כלומר,  $x_0$  היא לא נקודת אי-רציפות מסוג שני, שבה אחד הגבולות החד-צדדיים אינסופי.

ב. האם קיימת פונקציה  $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{שהנגזרת שלה נתונה על ידי}$$

(8) האם קיימת פונקציה  $f$ , גזירה ב- $[0, 1]$ ,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{שהנגזרת שלה ב-} [0, 1] \text{ נתונה על ידי}$$

(9) תהי  $f$  פונקציה גזירה ב- $\mathbb{R}$ , ונניח כי  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = f(2) = 1$ .

הוכיחו שקיים  $x \in (0, 2)$ , שעבורו  $f'(x) = \frac{1}{4}$ .

(10) תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $(a, b)$ , ומקיימת  $f'(x) \neq 0$  לכל  $x \in (a, b)$ .

הוכיחו כי  $f$  מונוטונית בקטע  $(a, b)$ .

(11) ממשפט דרבו נובע, שהנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת את תכונת ערך הביניים (למרות שהנגזרת לא בהכרח רציפה).

האם הנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת גם את משפטי ויירשטראס? הוכיחו או הפריכו זאת.

(12) תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $[0, 1]$ , המקיימת  $0 \leq f'(x) \leq 2$  לכל  $x$  בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה  $x$  ב- $[0, 1]$ , כך ש- $f'(x) = x^2 + x$ .

(13) תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $[0, 1]$ , המקיימת  $0 \leq f'(x) \leq 1$  לכל  $x$  בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה  $x$  ב- $[0, 1]$ , כך ש- $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$ .

(14) תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , המקיימת  $0 \leq f'(x) \leq 1$ , לכל  $x$  בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה  $x$  בקטע  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , כך ש- $f'(x) = \sin x$ .

(15) תהי  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, לא קבועה שמקיימת  $f(0) = f(1) = 0$ . הוכיחו שקיים  $x$  ב- $(0,1)$ , שעבורו  $f'(x)$  רציונלי השונה מ-0.

### תשובות סופיות

- (1) לא.
- (2) לא.
- (3) לא.
- (4) לא.
- (5) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
- (6) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
- (7) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
- (8) לא.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

# חדו"א 1 מ

פרק 17 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

- 1. טור טיילור וטור מקלורן ..... 241
- 2. טור טיילור סביב  $X=X_0$  ..... 243
- 3. חישוב סכום של טור ..... 244
- 4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן ..... 245
- 5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ ..... 246
- 6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים ..... 248
- 7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז' ..... 249
- 8. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות ..... 255



## טור טיילור וטור מקלורן

### שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x=0$  (טור מקלורן) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2-3x+x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.  
לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.  
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

## תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

## טור טיילור סביב $x = x_0$

### שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x = x_0$  של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

## חישוב סכום של טור

## שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

(1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(2)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

(3)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!}$

(4)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$

(5)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(6)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

(7)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

(8)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

(9)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

## תשובות סופיות

(1)  $e$

(2)  $e^{-2}$

(3)  $\sqrt{e}$

(4)  $2e$

(5)  $\pi/4$

(6)  $\sin 1$

(7)  $\cos 1$

(8)  $\ln 2$

(9)  $\ln \frac{3}{2}$

## חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

### שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$(4) \quad \text{נתון כי } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k \text{ כאשר } k \text{ קבוע שונה מאפס. מצאו את } n \text{ ואת } k.$$

$$(5) \quad \text{חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}.$$

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{1}{120}$$

$$(2) \quad \frac{1}{3}$$

$$(3) \quad \frac{1}{3}$$

$$(4) \quad k=1, n=3$$

$$(5) \quad 1$$

## חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

### שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

$$\frac{1}{e} \quad (1) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \arctan 0.25 \quad (3)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת  $n$  איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

$$(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4) \quad (n=1)\cos 4^\circ \quad (5) \quad (n=4)\ln 1.5 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ עבור } |x| \leq \frac{\pi}{6} ?$$

$$(8) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \ln(1+x) \cong x \text{ עבור } |x| < 0.01 ?$$

$$(9) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ עבור } |x| \leq 0.2 ?$$

$$(10) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.001 ?}$$

$$(11) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.01 ?}$$

## תשובות סופיות

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8}, \text{ בשגיאה הקטנה מ- } \frac{1}{48} \quad (4)$$

$$1, \text{ בשגיאה הקטנה מ- } \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (5)$$

$$\frac{77}{192}, \text{ בשגיאה הקטנה מ- } \frac{1}{160} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[9]{9/100} \quad (11)$$

## חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

### שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ-  $\varepsilon$  :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$



## חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

(1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt{x+4}$  סביב  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\sqrt{5}$  והעריכו את השגיאה בקירוב.  
ב. הוכיחו שלכל  $x > 0$  מתקיים:

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $\sqrt{x+4} \cong 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2$  עבור  $|x| < 0.1$ ?

(2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$  סביב  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\sqrt[3]{66}$  והעריכו את השגיאה בקירוב.  
ב. הוכיחו שלכל  $x > 0$  מתקיים:

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

(3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה  $f(x) = \tan x$  סביב  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\tan 0.1$  והעריכו את השגיאה בקירוב.  
ב. הוכיחו שלכל  $0 < x < 1$  מתקיים:

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

(4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  סביב  $x_0 = 16$ , כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\sqrt[4]{15}$  והעריכו את השגיאה בקירוב.

(5) חשבו את  $\sqrt[3]{29}$  ברמת דיוק של  $10^{-3}$ .

(6) חשבו את  $\sin 36^\circ$  בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$ , בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב  $x = 0$ .

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב  $x = \frac{\pi}{4}$ .

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את  $\sin 36^\circ$ ? נמקו.

(7) נתונה  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .

א. קרבו את  $f(x)$  על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור  $0 \leq x \leq 1$ , והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל  $x \geq 0$  מתקיים  $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$ .

(8) נתונה  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ .

א. קרבו את  $f(x)$  על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור  $0.1 \leq x \leq 0.9$ , והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

עבור  $0.1 \leq x \leq 0.9$ ,  $\frac{1}{1+x} \cong 1 - x + x^2 - x^3$ .

ג. הוכיחו כי עבור  $-1 < x$  מתקיים  $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x + x^2 - x^3$ .

(9) נתונה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ .

א. קרבו את  $f(x)$  על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור  $|x| \leq 0.5$ , והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

עבור  $|x| \leq 0.5$ ,  $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cong 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$ .

ג. פתרו את אי השוויון  $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$ , עבור  $-1 < x$ .

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור  $f(x) = e^x$ , כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את  $\sqrt{e}$  ברמת דיוק של  $10^{-4}$ .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

עבור  $0 \leq x \leq 1$ ,  $e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ .

ד. מצאו פולינום  $p(x)$  בקטע  $(-1, 1)$ , שעבורו  $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$ .

**11) ענו על הסעיפים הבאים :**

- א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור  $f(x) = \ln(1+x)$ , כולל נוסחת השארית של לגראנז'.
- ב. חשבו את  $\ln 1.5$  ברמת דיוק של  $10^{-4}$ .
- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :
- $$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{עבור } 0 \leq x \leq 1.$$
- ד. מצאו פולינום  $p(x)$  בקטע  $(0,1)$ , שעבורו  $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$ .
- ה. הוכיחו כי לכל  $x > 0$  מתקיים אי השוויון  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ .

**12) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[0,1]$ ,**ונניח ש-  $f(0) = f(1) = 0$  ו-  $|f''(x)| \leq M$  לכל  $0 < x < 1$ .הוכיחו כי  $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$  לכל  $0 \leq x \leq 1$ .**13) תהי  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים המקיימת  $f(-1) = f(1) = 0$ .**כמו כן, נתון כי קיים  $M$ , כך ש-  $|f''(x)| \leq M$  בקטע.הוכיחו שלכל  $-1 \leq x \leq 1$  מתקיים  $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$ .**14) תהי  $f$  פונקציה גזירה ב-  $(0, \infty)$ , ונניח כי  $|f'(x)| \leq M$  לכל  $0 < x$ .**הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ .**15) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים המקיימת  $f''(x) \geq 0$  לכל  $x \in [a,b]$ ,**ונניח כי  $x_0 \in [a,b]$ .א. הוכיחו שלכל  $x \in [a,b]$  מתקיים  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .ב. הוכיחו כי  $\cos y - \cos x \geq (x - y) \sin x$  לכל  $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .**16) תהי  $f: [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :**

$$M_0 = \sup_{x \geq a} |f(x)|, \quad M_1 = \sup_{x \geq a} |f'(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \geq a} |f''(x)|$$

הוכיחו כי:  $(M_1)^2 \leq 4M_0M_2$ .

**(17)** נניח ש-  $f$  גזירה פעמיים ב-  $(0, \infty)$  ו-  $f''$  חסומה ב-  $(0, \infty)$  ו-  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. נוסחה: } \sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81 \cdot \sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304} \cdot \frac{5}{663552}$$

$$\text{ב. שאלת הוכחה. ג. } \frac{1}{480000}$$

$$(2) \text{ א. נוסחה: } \tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2, \text{ חישוב: } \tan 0.1 = \frac{1}{10}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{970}$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(3) \text{ א. נוסחה: } \sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16 \cdot \sqrt{(c+4)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64} \cdot \frac{1}{512}$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(4) \text{ נוסחה: } \sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096} \cdot \frac{1}{3130}$$

$$(5) \quad \sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$$

$$(6) \text{ א. } \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\frac{\pi^3}{5}}{3!} + \frac{\frac{\pi^5}{5}}{5!} - \frac{\frac{\pi^7}{5}}{7!} \quad \text{ב. } \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^3$$

$$(7) \text{ א. ב. } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-0.25}$$

$$(8) \text{ א. } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \frac{6561}{10000}$$

$$\text{ב. שגיאה הקטנה מ-} \frac{6561}{10000} \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

$$(9) \text{ א. } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \frac{7}{27}$$

$$\text{ב. השגיאה המקסימלית היא } \frac{7}{27} \quad \text{ג. ראו בסרטון.}$$

$$(10) \text{ א. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^n \quad \text{ב. } \sqrt{e} = 1.6487$$

$$\text{ג. } \frac{3}{(n+1)!} \quad \text{ד. } p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$$

$$(11) \text{ א. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1}$$

$$\text{ב. } \ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9}$$

$$\text{ג. } \frac{1}{n+1} \text{ ד. } p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} \text{ ה. שאלת הוכחה.}$$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

(17) שאלת הוכחה.

**הערה לגבי קירובים**

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל- $n$  ספרות אחרי הנקודה,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-n}$ .

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.0005 = 0.5 \times 10^{-3}$ .

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

## נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| טור מקלורן                                                                                                                                                  | תחום התכנסות                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$                                                   | $-\infty < x < \infty$                                                                                                                 |
| $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$                               | $-\infty < x < \infty$                                                                                                                 |
| $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$                                   | $-\infty < x < \infty$                                                                                                                 |
| $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$                                     | $-1 < x \leq 1$                                                                                                                        |
| $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$                                  | $-1 \leq x \leq 1$                                                                                                                     |
| $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$                                                                                     | $-1 < x < 1$                                                                                                                           |
| $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$ | $-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$<br>$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$<br>$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$<br>$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ |

# חדו"א 1 מ

פרק 18 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים ..... 256
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 259



## אינטגרלים מידיים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ):

$$\int 4dx \quad (1) \quad \int x^4 dx \quad (2) \quad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \quad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \quad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \quad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10) \quad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad (11) \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ )

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \quad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \quad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \quad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \quad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} \quad (19) \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} + 1} \quad (20)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ )

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \quad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \quad \int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \quad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \quad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

(פתירה על ידי הכלל :  $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$ )

$$\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28) \qquad \int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

(30) חשבו את האינטגרל :  $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

(פתירה על ידי הכלל :  $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$ )

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

## תשובות סופיות

- $$4x + c \quad (1)$$
- $$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$
- $$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$
- $$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$
- $$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$
- $$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$
- $$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$
- $$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$
- $$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$
- $$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$
- $$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$
- $$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$
- $$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$
- $$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$
- $$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$
- $$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$
- $$-\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$
- $$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$
- $$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$
- $$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$
- $$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$
- $$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$
- $$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$
- $$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$
- $$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$
- $$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$
- $$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$
- $$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$
- $$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$
- $$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$
- $$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

## מציאת פונקציה קדומה

### שאלות

- (1) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ .  
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ .  
מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ .  
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 4$ .  
מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$ .  
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -6$ .  
מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - 6$ .  
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.  
מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$ .  
שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה  $y = 5\frac{2}{3}$ , הוא 3.  
מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה:  $f''(x) = 6x + 6$ .  
שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,  
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.  
מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה:  $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ .  
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר  $y = -4$ .  
מצאו את הפונקציה.

(8) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = 0$ ,  
ונתון בנוסף כי לכל  $x_0$  ממשי:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$ .

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.  
 ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .  
 ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.  
 ה. תהי  $G(x)$  פונקציה קדומה של  $|x|$ .  
 חשבו את הנגזרת  $(G(x) - f(x))'$ .

### תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

- (8) א. רציפה לכל  $x$ . ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . ג. נקודת חיתוך אחת  $(0,0)$ .  
 ד. נקודת פיתול אחת  $(0,0)$ . ה. 0.

# חדו"א 1 מ

פרק 19 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים ..... 261

## אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

### שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

- |                                                  |                                              |                                                |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\frac{1}{3} \ln  x^3 + 1  + c$ (3)              | $\ln  \sin x  + c$ (2)                       | $\ln  x^2 + 1  + c$ (1)                        |
| $e^2 \ln  e^x + 1  + c$ (6)                      | $\ln  \ln  x   + c$ (5)                      | $-\ln  \cos x  + c$ (4)                        |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c$ (9)                   | $e^{\tan x} + c$ (8)                         | $e^{x^2} + c$ (7)                              |
| $\sin(\ln x) + c$ (12)                           | $\sin(\sin x) + c$ (11)                      | $\sin(2x^2 + 1) + c$ (10)                      |
| $-2 \cos(\sqrt{x}) + c$ (15)                     | $-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c$ (14)        | $\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c$ (13)        |
| $\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c$ (18)                | $\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c$ (17)         | $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$ (16)               |
| $\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$ (21)   | $\sqrt{2 \sin x} + c$ (20)                   | $2\sqrt{x^2 + 1} + c$ (19)                     |
| $\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c$ (24) | $\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$ (23) | $\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c$ (22) |



# חדו"א 1 מ

פרק 20 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים.....263

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \sin^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(29) חשבו את  $\int \sin^4 x dx$ .

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(31) חשבו את  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

(32) חשבו את האינטגרלים  $\int e^{ax} \cos bxdx$ ,  $\int e^{ax} \sin bxdx$ .

## תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left( -\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right\} \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

# חדו"א 1 מ

פרק 21 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 267

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left( \frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left( \ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$



$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

## חדו"א 1 מ

פרק 22 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 270
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 272
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית..... 273

## אינטגרלים של פונקציה רציונלית

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

## תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left( \frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

## חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x - 1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x + 4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x - 1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x - 2| + \frac{1}{4} \ln|x + 2| + c \quad (5)$$

## אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}}$$
 (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$
 (2)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx$$
 (3)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx$$
 (4)

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$
 (5)

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$
 (6)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$
 (7)

## תשובות סופיות

$$-1.5 \ln \left| 1 - \sqrt[3]{x}^2 \right| + c \quad (1)$$

$$6 \left( \frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left( \frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left( (\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left( \frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

## נוסחאות

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

# חדו"א 1 מ

## פרק 23 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות ..... 275
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות ..... 277
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית ..... 278
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים ..... 279
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות ..... 282



## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

|                                            |                                                                |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\int \cos x dx = \sin x + c$              | $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$              |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$             | $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$             |
| $\int \tan x dx = -\ln  \cos x  + c$       | $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln  \cos(ax+b)  + c$       |
| $\int \cot x dx = \ln  \sin x  + c$        | $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln  \sin(ax+b)  + c$        |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$  | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$  |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$ |

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

- (1)  $\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$
- (2)  $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$
- (3)  $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$
- (4)  $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$
- (5)  $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$
- (6)  $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$
- (7)  $\int \sin x \cos x \cos 2x dx$
- (8)  $\int \tan^2 x dx$
- (9)  $\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2}$
- (10)  $\int \sin 7x \cos 5x dx$
- (11)  $\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx$
- (12)  $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$
- (13)  $\int \cos^2 x dx$
- (14)  $\int \sin^2 4x dx$
- (15)  $\int \cos^3 x dx$
- (16)  $\int \sin^3 4x dx$
- (17)  $\int \cos^4 x dx$
- (18)  $\int \sin^4 4x dx$
- (19)  $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$
- (20)  $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx$
- (21)  $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx$
- (22)  $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx$
- (23)  $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$
- (24)  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

## תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2) & -\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1) \\ & \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4) & -10 \cot 10x + c \quad (3) \\ & x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6) & \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5) \\ & \tan x - x + c \quad (8) & -\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7) \\ & \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10) & \tan x - \cot x + c \quad (9) \\ & \frac{3}{4} x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12) & \sin x + c \quad (11) \\ & \frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14) & \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13) \\ & -\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16) & \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15) \\ & \frac{3}{8} x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18) & \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17) \\ & 2 \sin x + c \quad (20) & -\cot x - x + c \quad (19) \\ & -\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22) & \ln |\cos x| + c \quad (21) \\ & & 3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23) \\ & & \frac{1}{8} \left( \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24) \end{aligned}$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ x = \arcsin t \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ x = \arccos t \end{array} \right.$$

זכרו כי :

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (3)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (8)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \left( \cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (4)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (5)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (8)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (12)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (11)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ x = 2 \arctan t \end{array} \right|$$

זכרו כי :

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left( \frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan \left( \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}} \right) \right) + c \quad (3)$$

## הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned}$$

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[ \ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} \quad (10)$$

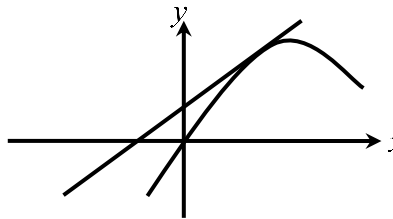
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

## חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = x + 2 \sin x$ .

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

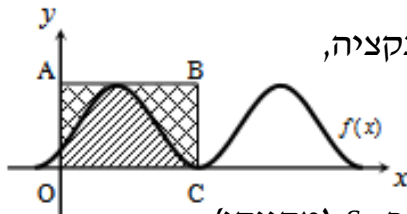


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ , ברביע הראשון והשני.

(2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ ,

בתחום  $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$ .



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- $x$  מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$  (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$  יסומן ב- $S_2$ .

א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .

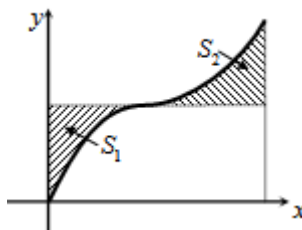
(3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $y = \sin x + x$ , בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

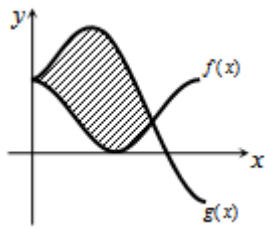
ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2\pi$ ,

ונעביר ישר המקביל לציר ה- $x$  מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

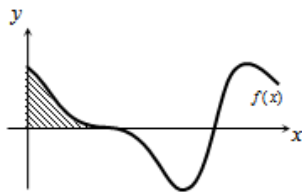
הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט,  $S_1$  ו- $S_2$ , שווים.



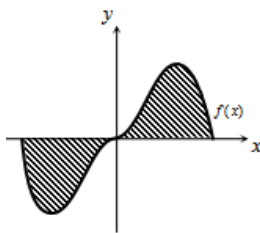




- 4 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \cos^2 x$  ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.  
 השתמשו בזהות  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .



- 5 הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$ .  
 א. מצאו את שיעורי ה- $x$  של הנקודות המקיימות  $f'(x) = 0$  בתחום  $0 < x < 2\pi$ .  
 ידוע כי הנקודה המקיימת  $f'(x) = 0$ , אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- $x$ .  
 ב. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 6 נתונה הפונקציה  $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$ .  
 א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא  $y' = x^2 \sin x$ .  
 באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 \sin x$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .  
 ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.  
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  בתחום הנתון.

- 7 נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ , כאשר  $a, b$  פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$ ,

והיא חיובית בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  הוא  $2\sqrt{2} - 2$ .

מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

## תשובות סופיות

(1) א.  $y = x + 2$  ב.  $\pi$  יח"ש.

(1) א.  $y = 1$  ב.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$

(2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה  $(\pi, \pi)$  היא נקודת פיתול.

ב.  $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$

(3) א.  $(0, 1)$ ,  $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$  ב.  $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$

(4) א.  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$  ב.  $f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$  ג.  $\frac{1}{2}$  יח"ש.

(5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג.  $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$

(6)  $b = -2, a = 2$

## נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

## חדו"א 1 מ

פרק 24 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א ..... 286
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים ..... 292
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות ..... 295
4. משפטי האינטגרביליות ..... 298
5. אינטגרביליות לפי דארבו ..... 299
6. אינטגרביליות לפי דארבו - תרגול נוסף באנגלית ..... 301

## האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

(10) הוכיחו כי :

$$\text{א. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

(11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה  $f$  :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

(12) תהי  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$ .

$$\text{פתרו את המשוואה } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

(13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של  $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$ .

$$(14) \text{ חשבו: } \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx$$

$$(15) \text{ חשבו: } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(16) נתונה פונקציה רציפה  $f$ . הוכיחו :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

(19) נתון כי  $f(x)$  פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל  $x$ , ונתון כי  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

$$\text{חשבו את האינטגרל } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) dx$$

(20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ג. } \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

(21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

$$\text{א. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \text{ בעזרת ההצבה } t = \frac{1}{x}.$$

$$\text{ב. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ישירות.}$$

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$(22) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. בעזרת ההצבה } t = \tan x \text{ חשבו את האינטגרל } \int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{ב. חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$(24) \text{ חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(25) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ .

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = a$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{3}$  עם הכיוון

החיובי של ציר  $x$  והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = b$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{4}$  עם הכיוון החיובי של ציר  $x$ .

$$\text{חשבו את ערך האינטגרל } \int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

(26) הוכיחו:

אם  $f$  פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם  $T$  המחזור של  $f$

$$\text{אז לכל מספר ממשי } a \text{ מתקיים } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

(27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו- $g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ , ואם  $\int_a^b f(t) dt = 0$  וגם

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = 0 \text{ אז } \int_a^b g(t) dt = 0$$

ב. אם  $f$  זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

$$\text{אז הפונקציה } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ אי-זוגית.}$$



## תשובות סופיות

(1)  $-6$

(2)  $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3)  $-2e^{-1} + 1$

(4)  $\frac{1}{5}$

(5)  $\arctan 6 - \arctan 3$

(6)  $\frac{\pi}{2}$

(7)  $\frac{17}{12}$

(8)  $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9)  $\frac{17}{6}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $x = e^2$

(13)  $0$

(14)  $\frac{\pi}{4}$

(15)  $\frac{\pi^2}{4}$

(16) שאלת הוכחה.

(17)  $0$

(18)  $2 \arctan 4$

(19)  $0$

(20) א, ב, ג.  $\frac{\pi}{4}$

(21) א.  $0$  ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג. ראו בסרטון.

(22) שאלת הוכחה.

(23) א.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$  ב.  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(24)  $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

(25)  $1 - \sqrt{3}$

**(26)** שאלת הוכחה.

**(27)** שאלת הוכחה.

## מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

### שאלות

- (1) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x$  בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו כי  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 2-10:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

(11) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם  $|f|$  אינטגרבילית בקטע,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

הוכיחו כי

(12) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$  לכל  $x \in [0, 1]$ . הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

(13) תהי  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f''(x) > 0$  לכל  $x \in [0, a]$ . הוכיחו כי  $\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$ . תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

(14) תהי  $g$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b |g(t)| dt = 0$ . הוכיחו כי לכל  $x$  בקטע  $(a, b)$ , מתקיים  $g(x) = 0$ .

(15) תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b f(x) dx > 1$ . הוכיחו שקיים  $x_0$  בקטע  $[a, b]$ , עבורו  $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$ .

(16) יהי  $n$  מספר טבעי, ותהי  $f$  פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע  $[1, n]$ .

הוכיחו כי  $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$ .

(17) חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$ .

(18) הוכיחו שאם הפונקציה  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ , גזירה בקטע  $(a, b)$

וגם  $f'(x) \leq M$  לכל  $x$  בקטע זה, וכן  $f(a) = 0$ , אז  $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2}$ .

(19) יהיו  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי  $f$  עולה ו- $g$  אי-שלילית.

הוכיחו שקיים  $c \in [a, b]$  כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)$$

\* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

$$(13) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^4 x^2 dx.$$

$$(14) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

$$P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\} \text{ רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע}$$

## תשובות סופיות

(1)  $\frac{1}{5}$

(2)  $1 - \cos 1$

(3)  $\ln 2$

(4)  $\frac{\pi}{4}$

(5)  $\ln(1 + \sqrt{2})$

(6)  $\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3}$

(7)  $\ln 2$

(8)  $-1$

(9)  $\frac{1}{2}$

(10)  $\frac{1}{3}$

(11)  $\frac{1}{4}$

(12)  $2$

(13)  $21$

(14)  $0.5$



## משפטי האינטגרביליות

### שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$  :

$$[a, b] = [0, 2] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$[a, b] = [-4, 14] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{ב.}$$

$$[a, b] = [0, 9] \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ -41 & x = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע  $[a, b]$ .
- ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.
- ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע  $[-1, 1]$ , שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

- א. קיימת פונקציה אינטגרבילית  $f$ , בקטע  $[a, b]$ , שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.
- ב. קיימת פונקציה  $f$ , החסומה בקטע  $[a, b]$  וגזירה בקטע  $(a, b)$ , שאינה אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

$$4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 2 & x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע  $[0, 1]$ ?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## אינטגרביליות לפי דארבו

### שאלות

- (1) נתונה  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי  $f(x) = x$ .
- א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

- (2) נתונה  $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על ידי  $f(x) = x^2$ .
- א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

- (3) נתונה הפונקציה הבאה
- $$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & x = 0.5 \\ 1 & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$
- הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

- (4) נתונה הפונקציה
- $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
- בבקטע  $[0,1]$ .
- א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.
- ב. תנו דוגמה לפונקציה  $f$ , כך ש-  $|f|$  ו-  $f^2$  אינטגרביליות, אך  $f$  לא אינטגרבילית.

- (5) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.
- נניח שקיימת חלוקה  $P$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $L(P, f) = U(P, f)$ .
- הוכיחו ש-  $f$  פונקציה קבועה.

- (6) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.
- נניח שקיימת חלוקה  $P_n$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $U(P_n, f) - L(P_n, f) \rightarrow 0$ .
- א. הוכיחו ש-  $f$  אינטגרבילית בקטע.
- ב. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x) dx$ .

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א.  $f(x) = x$ , בקטע  $[0, 1]$ .

ב.  $f(x) = x^2$ , בקטע  $[0, 2]$ .

(8) הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$  אינטגרבילית בקטע  $[1, 2]$  בעזרת קריטריון רימן.

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \overline{\int_0^1 f} = \underline{\int_0^1 f} = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \int_0^1 f \, dx = \frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad \overline{\int_0^2 f} = \underline{\int_0^2 f} = \frac{8}{3} \quad \text{א.} \quad \int_0^2 f \, dx = \frac{8}{3} \quad \text{ב.}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

## אינטגרליות לפי דארבו – תרגול נוסף באנגלית

### שאלות

(1) תהי  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי  $f(x) = x^2$ . מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאים לחלוקת הקטע ל- $n$  תת-קטעים בעלי אורך שווה, כאשר  $n = 6, 8, 10, 20$ .

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו את המושג עידון של חלוקה.

ב. הוכיחו את המשפט הבא:

תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה ויהיו  $P$  ו- $Q$  שתי חלוקות של הקטע, כך ש- $Q$  עידון של  $P$ , אז  $L(Q, f) \geq L(P, f)$ ,  $U(Q, f) \leq U(P, f)$ .  
ג. הוכיחו את המסקנה הבאה מהמשפט:

$$\text{תהי } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ פונקציה חסומה, אז } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$$

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את קריטריון רימן לאינטגרליות.

כלומר, הוכיחו את המשפט הבא:

פונקציה חסומה  $f$  היא אינטגרלית בקטע  $[a, b]$  אם ורק אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $P$  של הקטע  $[a, b]$ , כך ש- $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ .  
ב. הוכיחו את המסקנה מהמשפט לעיל:

תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $[a, b]$ , ונניח כי  $(P_n)$  היא סדרה של

$$\text{חלוקות של הקטע } [a, b], \text{ כך ש- } U(P_n, f) - L(P_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

הוכיחו ש- $f$  אינטגרלית.

$$\text{ג. נתון } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ מוגדרת על ידי } f(x) = \begin{cases} x & x = 1/n \\ 0 & x \neq 1/n \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו כי } f \text{ אינטגרלית ומצאו את } \int_0^1 f(x) dx.$$

(4) הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרלית בקטע.

ב. פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרלית בקטע.

$$(5) \quad f_n(x) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ מוגדרת על ידי: } f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{1+x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0 \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$(6) \quad \text{תהי פונקציה } f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ כך ש-} f(x) = x \text{ לכל } x \text{ רציונלי,}$$

$$\text{ו-} f(x) = 0 \text{ לכל } x \text{ אי-רציונלי.}$$

העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של  $f$ , והראו כי  $f$  אינה אינטגרבילית.

$$(7) \quad \text{תהי } f : [0,1] \rightarrow [0,1], \text{ מוגדרת באופן הבא:}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{אם } x = \frac{p}{q} \neq 1, \text{ כאשר } p, q \in \mathbb{N}, \text{ ול-} p, q \text{ אין גורמים משותפים} \\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x = 0 \text{ או } x = 1 \end{cases}$$

$$A_N = \left\{ x \in (0,1) \mid x = \frac{p}{q} \right\} : N \in \mathbb{N} \text{ לכל } N, \text{ מוגדרת באופן הבא, לכל } N \in \mathbb{N}$$

כאשר  $p, q \in \mathbb{N}, q \leq N$  ול- $p, q$  אין גורמים משותפים.

הראו שהקבוצה  $A_N$  סופית.

ב. ל- $N \in \mathbb{N}$  ו- $\varepsilon > 0$  נתונים, הראו כי קיימים קטעים

$$: \text{כך ש-} [x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2m-1}, x_{2m}]$$

$$, 0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{2m-1} < x_{2m} < 1$$

$$, A_N \subseteq (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4) \cup \dots \cup (x_{2m-1}, x_{2m})$$

$$\text{ו-} |x_1 - x_2| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_{2m-1} - x_{2m}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ג. הראו ש- $f$  אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות,  $g$  ו- $h$  ב- $[0,1]$ ,

כך שהרכבה  $g \circ h$  אינה אינטגרבילית.

$$(8) \quad \text{תהי } f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ אינטגרבילית וכן } [c,d] \subseteq [a,b].$$

הראו ש- $f$  אינטגרבילית ב- $[c,d]$ .

9 ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f$  חסומה ב- $[c, d]$ , ונתון :

$$M = \sup \{ f(x) \mid x \in [c, d] \}, \quad M' = \sup \{ |f(x)| \mid x \in [c, d] \}$$

$$m = \inf \{ f(x) \mid x \in [c, d] \}, \quad m' = \inf \{ |f(x)| \mid x \in [c, d] \}$$

הוכיחו כי  $M' - m' \leq M - m$ .

ב. תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית.

הוכיחו כי  $|f|$  ו- $f^2$  אינטגרביליות.

10 תהינה  $f$  ו- $g$  שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

א. הוכיחו כי אם  $f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \in [a, b]$ , אז  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

ב. הוכיחו כי  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

ג. הוכיחו כי אם  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x \in [a, b]$ ,

$$\text{אז } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\text{היעזרו באי-שוויון זה כדי להראות ש-} \frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}$$

11 תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (כלומר,  $f(x) \geq 0$ ).

א. הוכיחו כי אם  $f$  רציפה וכן  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , אז  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [a, b]$ .

ב. הביאו דוגמה לפונקציה  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ , כאשר  $\int_a^b f(x) dx = 0$ ,

אבל קיים  $x_0 \in [a, b]$ , עבורו  $f(x_0) > 0$ .

הערה:  $f$  לא תהיה רציפה.

12 תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

נניח שלכל  $c \in (0, 1)$ , הפונקציה  $f$  אינטגרבילית ב- $[c, 1]$ .

א. הוכיחו כי  $f$  אינטגרבילית ב- $[0, 1]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \end{cases}$$

ב. היעזרו בסעיף א, והוכיחו כי

אינטגרבילית ב- $[0, 1]$ .

**(13)** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

נניח שכאשר המכפלה  $fg$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ , עבור פונקציה אינטגרבילית

$$\text{כלשהי } g, \text{ מתקיים } \int_a^b (fg)(x) dx = 0.$$

הוכיחו כי  $f(x) \equiv 0$  (כלומר,  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [a, b]$ ).

**(14)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו  $x, y \geq 0$ .

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{x, y\}$$

ב. תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  רציפה.

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b (f(x))^n dx \right) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

**(15)** [אי-שוויון קושי-שוורץ]

א. יהיו  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ .

$$\text{הוכיחו כי } \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{רמז: } \sum_{i=1}^n (tx_i + y_i)^2 \geq 0 \text{ לכל } t \in \mathbb{R}$$

ב. תהיינה  $f, g$  שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

$$\text{הוכיחו כי } \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{רמז: } \int_a^b [tf(x) + g(x)]^2 dx \geq 0 \text{ לכל } t \in \mathbb{R}$$

**(16)** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של  $f$  במספר סופי של נקודות.

הוכיחו שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.

**(17) סעיף א'**

1. הוכיחו כי  $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \dots + b^{n-2} + a^{n-1})$ ,

כאשר  $n \in \mathbb{Z}^+$  וכן  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2. הוכיחו כי  $k^n < \frac{(k+1)^{n+1} - k^{n+1}}{n+1} < (k+1)^n$  כאשר  $k, n \in \mathbb{Z}^+$ .

3. הוכיחו כי  $\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^m k^n$ .

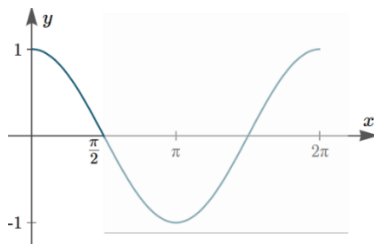
כלומר,  $1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n + m^n$ .

**סעיף ב'**

תהי  $f(x) = x^n$  מוגדרת בתחום  $[0, 1]$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}$ .

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי  $f$  אינטגרבילית ב- $[0, 1]$ , וחשבו  $\int_0^1 f(x) dx$ .

רמז: חלקו את הקטע  $[0, 1]$  ל- $m$  קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.



**(18)** תהי  $f(x) = \cos x$  מוגדרת ב- $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}$ .

השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש- $f$  אינטגרבילית

ב- $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , וחשבו את  $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$ .

רמז 1: חלקו את  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ל- $n$  קטעים שווים, והניחו כי  $n \rightarrow \infty$ .

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר  $k \in \mathbb{Z}^+$  ו- $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{(2k+1)\theta}{2} - \sin \frac{(2k-1)\theta}{2} \right]$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{(2n+1)\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

**(19)** חשבו את  $\int_1^2 f(x) dx$ , בעזרת החלוקה  $P_n = \left\{ \overset{=1}{x_0}, x_1, \dots, \overset{=2}{x_n} \right\}$ ,

כאשר  $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$  ( $0 \leq i \leq n$ ) וגם:

$$P_4 = \left\{ 1, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{2}{4}}, 2^{\frac{3}{4}}, 2 \right\} \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$



(20) תהיינה  $f, g$  שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו:

א. אם  $f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \in [a, b]$ , אז  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

ב. אם  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x \in [a, b]$ , אז  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

(21) נניח כי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכיחו כי  $\sqrt{f}$  אף היא אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

(22) נתונה הפונקציה  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f$  אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,

אז  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

ב. אם  $f$  רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

ג. אם  $f$  אינטגרבילית, אז כך גם  $f^2$ .

ד. אם  $|f|$  אינטגרבילית, אז כך גם  $f$ .

(23) חשבו את  $\int_{0.25}^{4.3} \lfloor x \rfloor dx$ , כאשר  $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$  (פונקציית הערך השלם).

(24) הוכיחו כי אם  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$  ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

אז  $\alpha f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ , וכן  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$ .

רמז: הניחו תחילה כי  $\alpha \geq 0$ , והיעזר בפונקציה  $-f$ , ל- $\alpha < 0$ .

(25) הוכיחו כי אם  $f, g$  אינטגרביליות ב- $[a, b]$ , אז כך גם  $f + g$ ,

ובנוסף מתקיים  $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ .

רמז: הוכיחו כי  $\overline{\int_a^b (f + g)} \leq \overline{\int_a^b f} + \overline{\int_a^b g}$  וכן  $\underline{\int_a^b (f + g)} \geq \underline{\int_a^b f} + \underline{\int_a^b g}$ .

(26) נניח כי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית וכן שקיים  $c > 0$ , כך ש- $|f(x)| \geq c$  לכל

$x \in [a, b]$ . [לחלופין:  $f$  אינטגרבילית ואינה אפס;  $\frac{1}{f}$  חסומה]

הוכיחו כי גם  $g = \frac{1}{f}$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ .

**(27)** נניח כי  $f, g$  אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

א. הוכיחו כי גם  $f \cdot g$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

ב. הוכיחו כי אם  $|g(x)| \geq c > 0$  לכל  $x \in [a, b]$ ,

אז גם  $\frac{f}{g}$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

**(28)** הניחו כי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  וכן ש- $a < c < b$ , והוכיחו כי:

א. אם  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ , אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a, c]$  ו- $[c, b]$ .

ב. אם  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, c]$  ו- $[c, b]$ , אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a, b]$ .

ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**(29)** נניח כי  $f, g$  אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

נגדיר  $\varphi = \max\{f, g\}$  וכן  $\psi = \min\{f, g\}$ .

הוכיחו כי גם  $\varphi, \psi$  אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

רמז:  $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b + |a - b|]$ ,  $\min\{a, b\} = ?$

**(30)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  של  $[a, b]$  וכן  $\varepsilon > 0$ ,

נגדיר שתי תתי-קבוצות,  $A_\varepsilon(P)$  ו- $B_\varepsilon(P)$  של  $\{1, \dots, n\}$ , באופן הבא:

$i \in A_\varepsilon(P)$  אם  $M_i - m_i < \varepsilon$  ו- $i \in B_\varepsilon(P)$  אם  $M_i - m_i \geq \varepsilon$ .

כמו כן, נגדיר  $s_\varepsilon(P) = \sum_{i \in B_\varepsilon(P)} \Delta x_i$ .

הוכיחו כי פונקציה חסומה  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$  אם ורק אם

לכל  $\varepsilon > 0$  ולכל  $\tau > 0$  קיים  $\delta > 0$ , כך שלכל  $P$  כנ"ל  $\|P\| < \delta \Rightarrow s_\varepsilon(P) < \tau$ .

**(31)** נניח כי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ותהי  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  חלוקה של  $[a, b]$ .

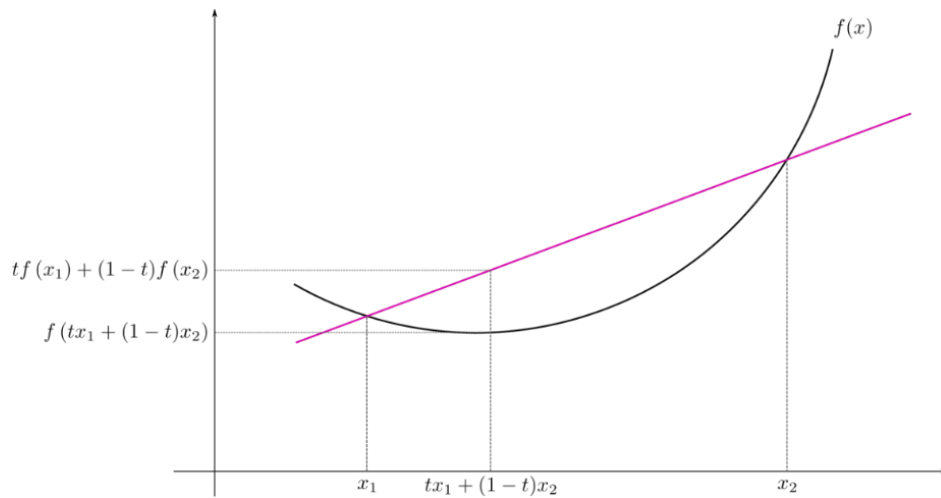
א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  ל- $P$ ,

כך ש- $S(f; P, C) = L(f, P)$ ? נמקו.

הערה: ב"תגיות" הכוונה ש- $x_{i-1} < c_i < x_i$ .

ב. האם התשובה תשתנה אם יינתן גם כי  $f$  רציפה?

**(32)** זכרו כי פונקציה  $f$  על קטע  $I$  תיקרא קמורה, אם לכל  $a, b \in I$ , ולכל  $t \in [0, 1]$ , מתקיים

$$f(t \cdot a + (1-t) \cdot b) \leq t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(b)$$


א. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  קמורה.

הוכיחו כי לכל  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$  המקיימים  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ , מתקיים אי-השוויון

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(a_i) \quad [\text{רמז: אינדוקציה על } n]$$

ב. (אי-שוויון יַנְסֶן)

תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  קמורה ורציפה, ותהי  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה.

$$\text{הוכיחו כי } f\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x)) dx$$

**(33)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ותהי  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

א. הוכיחו כי  $f$  אי-זוגית אם ורק אם  $F$  זוגית.

ב. הוכיחו כי  $f$  זוגית אם ורק אם  $F$  אי-זוגית.

**(34)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ותהי  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

א. הוכיחו כי אם  $F$  מחזורית, אז גם  $f$  מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה  $f$  מחזורית אבל  $F$  לא-מחזורית.

**(35)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית.

$$\text{הוכיחו שקיים } c \in [a, b] \text{ ש-} \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

**(36)** תהי  $A$  קבוצת כל הפונקציות  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , שהן אינטגרביליות בכל  $[a, b]$ ,

ומקיימות את השוויון הבא לכל  $x \in \mathbb{R}$  :  $\int_0^x f(t) dt = f(x) - 1$ .

- א. מצאו דוגמה לפונקציה ב- $A$ .
- ב. הוכיחו כי אם  $f \in A$ , אז  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ .  
(רמז: תחילה הראו ש- $f$  רציפה).
- ג. מצאו את כל הפונקציות ב- $A$ .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חדו"א 1 מ

פרק 25 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

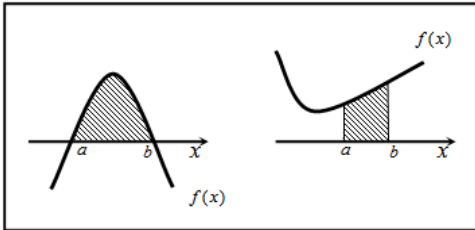
תוכן העניינים

|     |                              |
|-----|------------------------------|
| 310 | 1. חישוב שטחים               |
| 330 | 2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y |
| 331 | 3. אורך קשת                  |

## חישוב שטחים

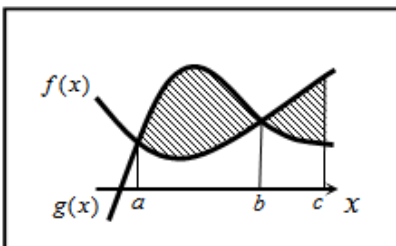
### חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$  :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

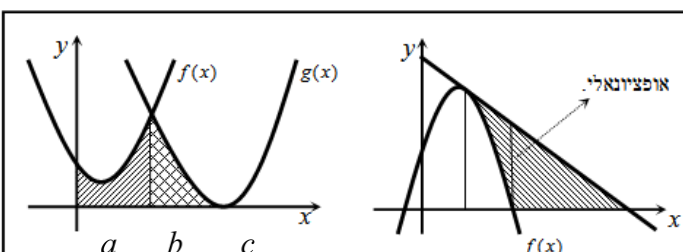


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

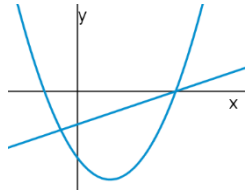
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$  :

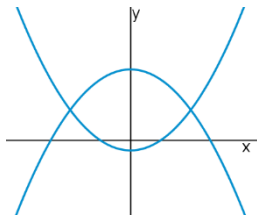


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

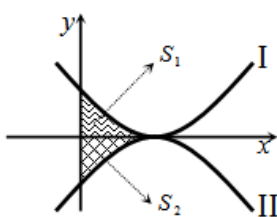
## שאלות



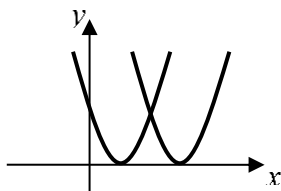
- (1) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 4x - 12$  ו-  $g(x) = x - 6$ .  
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



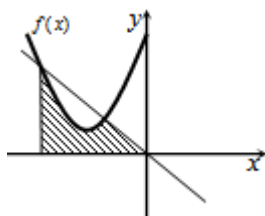
- (2) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 1$  ,  $g(x) = 7 - x^2$ .  
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



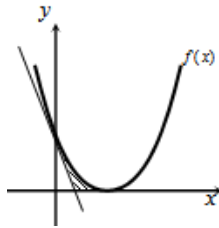
- (3) נתונות הפונקציות  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = -(x-2)^2$ ,  
כמתואר באיור.  
א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.  
ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים  
ב-  $S_1$  ו-  $S_2$ , כמתואר באיור.  
הראו כי השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  שווים זה לזה.



- (4) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה-  $x$ .



- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 + 6x + 12$ .  
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה  
בנקודה שבה  $x = -4$ , כמתואר באיור.  
א. מצאו את משוואת הישר.  
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.  
ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה-  $x$  והישר  $x = -4$ .



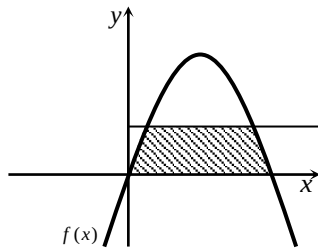
6) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-2)^2$ .

בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



7) נתונה הפונקציה  $f(x) = kx - x^2$ .

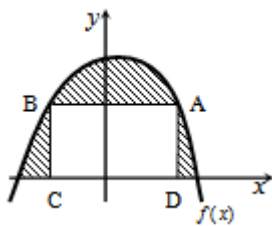
הישר  $y = 9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות אלה הוא  $x = 9$ .

א. מצאו את ערך הפרמטר  $k$ .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



8) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן,

היא  $f'(x) = 3 - 2x$ . ישר  $AB$ , שמשוואתו  $y = 6$

חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות  $A$  ו- $B$ .

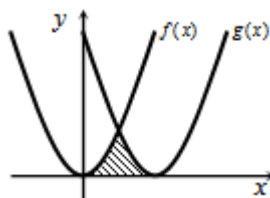
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,

כך שנוצר מלבן  $ABCD$ .

ידוע ששיעור ה- $x$  של הנקודה  $A$  הוא  $x = 4$ .

א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



9) באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה  $f(x) = x^2$

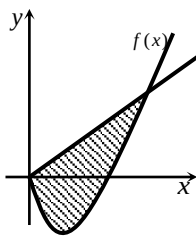
את גרף הפונקציה  $g(x)$ , בנקודה שבה  $x = 2$ .

הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  היא  $g'(x) = 2x - 8$ .

א. מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$  (השטח המסומן).





10 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $y = 2x$ .

נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 2x - 6$ ,

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

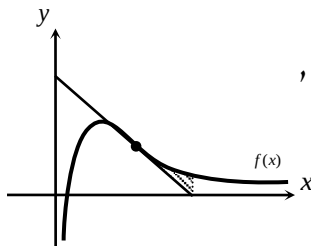
בנקודה שבה ערך ה- $y$  הוא  $y = 16$ .

א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11 ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ ,

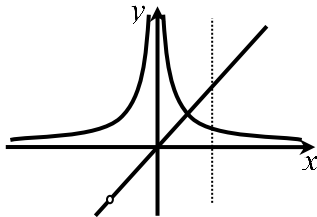
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- $x$ ,

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

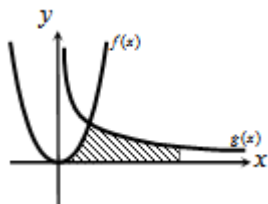


12 נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר  $x = 2$  וציר ה- $x$ .

13 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות



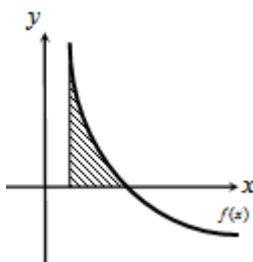
$f(x) = 2x^2$  ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$  (קבוע  $a$ ), בתחום  $x > 0$ .

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,

בנקודה הנמצאת על הישר  $y = 4x$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת  $a$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר  $x = 4$ .



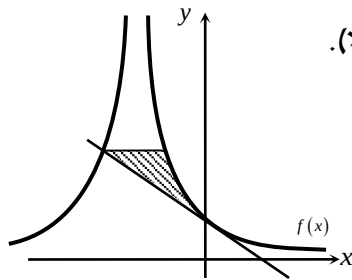
14 גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$  (קבוע  $a$ )

חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $(6, 0)$ .

א. מצאו את  $a$  וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

ציר ה- $x$  והישר  $x = 2$ .



15 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$  (פרמטר חיובי).  $A$

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם

ציר ה- $y$ , הוא  $-\frac{1}{9}$ .

א. מצאו את ערך הפרמטר  $A$ .

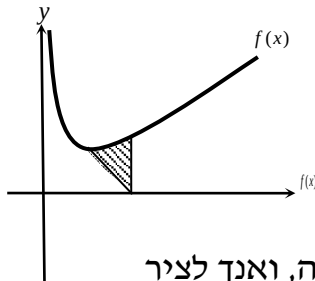
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ .

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -4.5$ .

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף

הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).



16 באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$ .

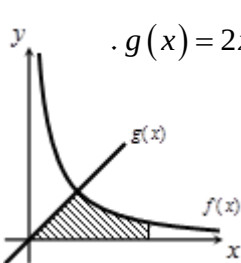
א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר

ישר לנקודה  $(2, 0)$ , שעל ציר ה- $x$ .

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר

ה- $x$ , היוצא מהנקודה  $(2, 0)$  עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.



17 באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$  ו- $g(x) = 2x - 1$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

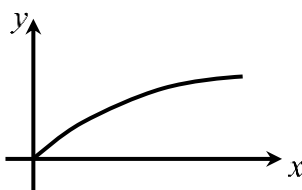
ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים,

ציר ה- $x$  והישר  $x = 9$ .

18 נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת

המינימום שלה וציר ה- $y$ .



19 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

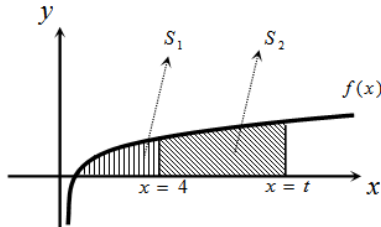
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק והישר  $x = \sqrt{3}$ .

(20) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

נעביר שני אנכים לציר ה- $x$ ,  $x = 4$  ו- $x = t$  (כאשר  $t > 4$ ).  
נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  ב- $S_1$ ,  
ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנכים ב- $S_2$ .

ידוע כי  $8S_1 = S_2$ .  
מצאו את  $t$ .



(21) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$ .

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא  $m = \frac{17}{16}$ .

מצאו את נקודת ההשקה.

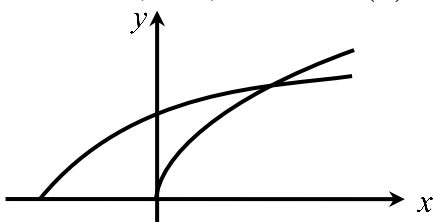
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$  מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

(22) נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \sqrt{x+b}$ ,  $g(x) = \sqrt{2x}$ , כאשר  $b > 0$ .

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- $x$  הוא  $2\frac{2}{3}$  יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר  $b$ .



(23) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = x^2$  ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$ ,

ברביע הראשון.

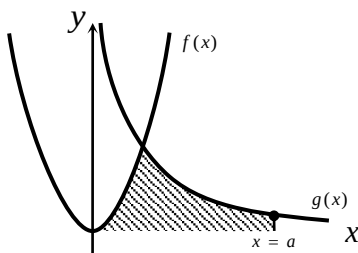
נעביר ישר  $x = a$ , החותך את גרף הפונקציה  $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- $x$  והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $85\frac{1}{3}$ .

מצאו את  $a$ .



(24) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$  ו-  $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$ .

נעביר שני ישרים  $x = k$  ו-  $x = t$ , אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

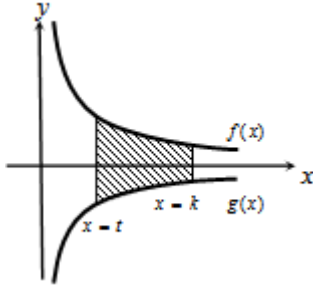
ידוע כי  $AB = 2CD$ .

א. הראו כי  $k = 4t$ .

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות

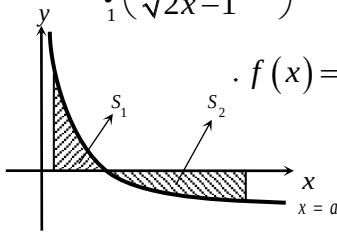
לבין הישרים  $x = k$  ו-  $x = t$ , הוא  $S = 12$ .

מצאו את  $t$ .



(25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של  $a$ ,  $a > 1$ , יתקיים  $\int_1^a \left( \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$ .



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$ .

נעביר שני אנכים לציר ה- $x$ ,  $x = 1$  ו-  $x = 13$ ,

כך שנוצרים השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ .

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

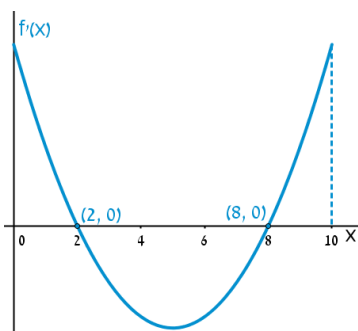
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- $x$  והאנך  $x = 1$ , כלומר את  $S_1$ .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח  $S_2$ .

נמקו.



(26) הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 10$ .

בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

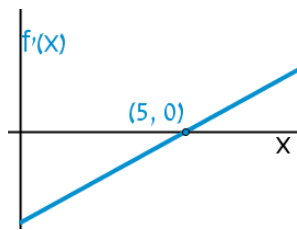
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

אם  $f(5) = 0$ ,  $f(0) = -4$ ,  $f(2) = 6$ ,

וכן  $f(10) > 0$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה  $x = 2$ .



(27) להלן גרף הפונקציה  $f'(x)$ , אשר חותך את

ציר ה- $x$  בנקודה אחת בלבד,  $(5, 0)$ .

א. מצאו את התחומים שבהם  $f'(x)$  חיובית,

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$

שלה הוא  $y = -2$ .

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 8$ .

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים.

(28) באיור שלהלן מתוארת הנגזרת  $f'(x)$ .

א. האם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודות קיצון? נמקו.

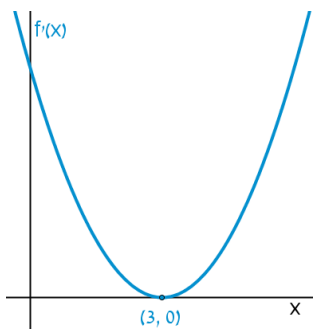
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

אם ידוע כי  $f(3) = 4$ , וכי היא חותכת את

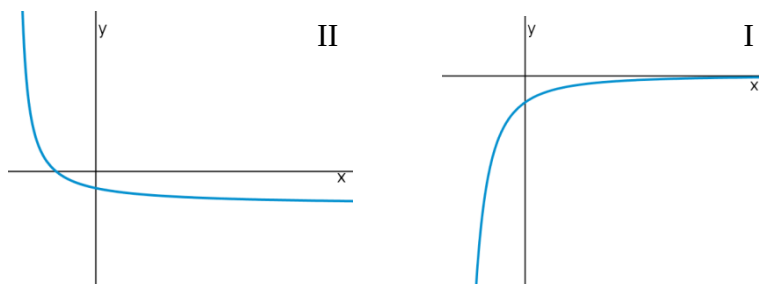
ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -5$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.



(29) באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ :

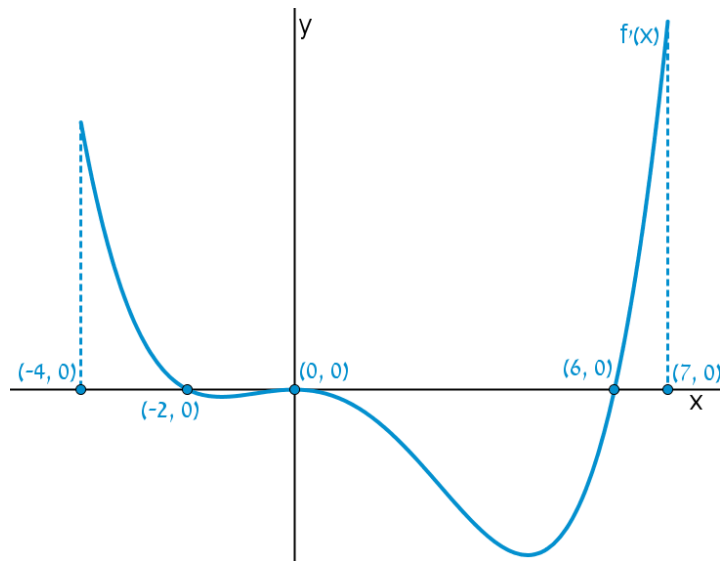


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון  $f(10) = -3$ , וכי  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2$ .

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$ , הצירים והישר  $x = 10$ ?

30 נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  :

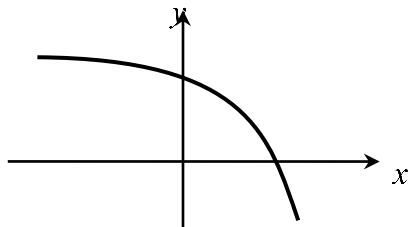


- א. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 7$ ,  
 לפי הנתונים  $f(0) = -2$ ,  $f(-2) = 7.6$  ו-  $f(6) = -606.8$ .  
 ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע השלישי.  
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע הרביעי.

## פונקציות מעריכיות

## אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות

| אינטגרלים יסודיים                     | אינטגרלים של פונקציות מורכבות                           |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$               | $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$             |



(31) נתונה הפונקציה  $f(x) = 5 - e^x$ .

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו  $-e$ .  
חשבו את גודל השטח הכלוא בין  
הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.

(32) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{bx}$ , כאשר  $b > 0$ .

גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים

וציר ה- $y$  הוא  $\frac{e-2}{4}$ .

מצאו את ערכו של הפרמטר  $b$ .

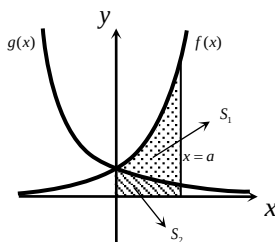
(33) נתונות הפונקציות  $f(x) = e^{-x}$  ו- $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ .

מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  ברביע הראשון הורידו אנך לשני

הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$  חותך את הפונקציה  $f(x)$ ,

ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- $x$ , כך שנוצר מלבן.

הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא  $\frac{3}{e}$ .



(34) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$f(x) = e^{2x}$  ו- $g(x) = e^{-2x}$ .

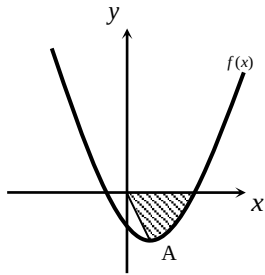
נעביר אנך לציר ה- $x$  את הישר  $x=a$ ,

כאשר  $a > 0$ , כמתואר באיור.

אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .

ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ .

מצאו את  $a$ .



(35) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$ .

הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

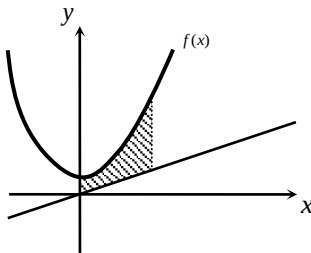
ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה

A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה-x, אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה-x בנקודה שבה  $x = 1.7$ .



(36) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$ .

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה  $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$ .

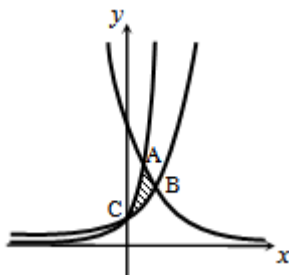
א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

והישר  $y = 0.1x$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה-y

והאנך  $x = 2$ .



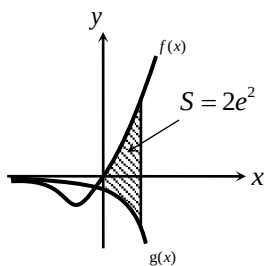
(37) באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$1. f(x) = 2^x \quad 2. g(x) = 4^x \quad 3. h(x) = 2^{4-2x}$$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.



(38) ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה  $y = e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של

הפונקציות  $f(x) = xe^x$  ו-  $g(x) = -e^x$ .

נעביר ישר  $x = a$ , כאשר  $a > 0$ , החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה-y והישר (מקווקו).

ידוע כי שטח זה שווה ל-  $2e^2$ .

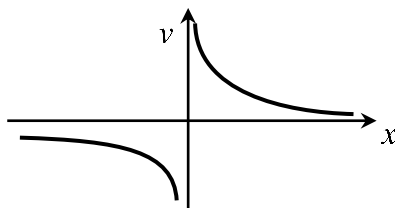
מצאו את a.



## פונקציות לוגריתמיות

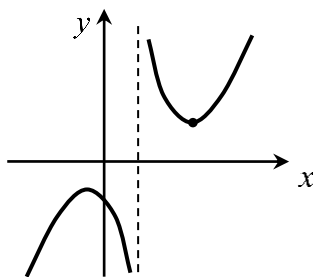
## אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות

| אינטגרל יסודי                      | אינטגרל של פונקציה מורכבת                            |
|------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$ | $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$ |



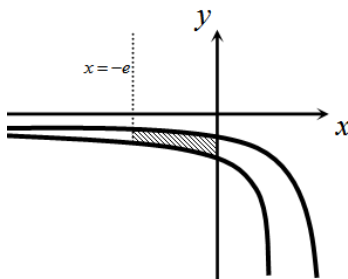
(39) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x = -1$  ו- $x = -4$  וציר ה- $x$ . ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.



(40) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$ , ואנך לציר ה- $x$  העובר בנקודת המינימום שלה. אפשר להשאיר ביטוי עם  $\ln$  בתשובה.

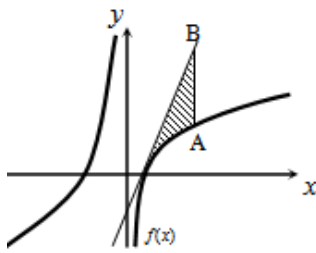


(41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ , בתחום  $x < 0$ .

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה  $x = 3$ .

א. מצאו את  $a$  וכתבו את שתי הפונקציות.  
ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .

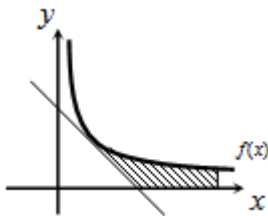


(42) נתונה הפונקציה  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$ .

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא  $y = 18x - 9$ .  
א. מצאו את  $a$  ו- $b$  וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- $y$ , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

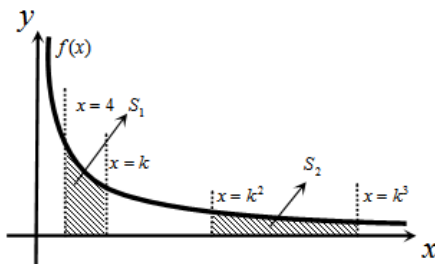
- ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



(43) נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$  היא  $y = 4 - x$ .  
א. מצאו את  $f(x)$ .

- ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  ומשיק, בתחום  $x > 0$ .  
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$  והישר  $x = e^2$ .

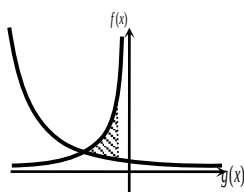


(44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה

$f(x) = \frac{2}{x}$ , בתחום  $x > 0$ .

נעביר את הישרים  $x = k$ ,  $x = k^2$ ,  $x = k^3$  ו- $x = 4$  ( $x > 4$ ).  
א. הביעו באמצעות  $k$  את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .

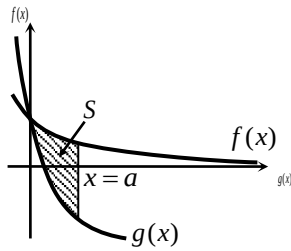
- ב. הראו כי ההפרש  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$ , וחשבו את ערכו.  
ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ . מצאו את  $k$ .



(45) נתונות הפונקציות  $f(x) = -\frac{4}{x}$  ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ .

גרף  $g(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 0.4$ .  
א. מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .

- ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.  
ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



**(46)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  
 $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$  ו-  $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$ ,  
 בתחום  $x \geq 0$ .

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

ב. נעביר ישר  $x = a$  ( $a > 1$ ), המאונך

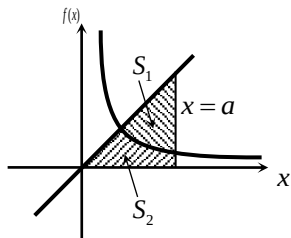
לציר ה- $x$ , חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח  $S$  (ראה איור).

מצאו את ערכו של  $a$ , עבורו מתקיים  $S = 4$ .

**(47)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר  $y = x$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים

$S_1$  ו-  $S_2$ , המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של  $a$ , עבורו השטח  $S_2$

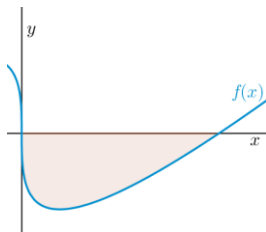
יהיה שווה ל-  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$ .

ג. עבור ערך ה- $a$  שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים  $\frac{S_1}{S_2}$ .

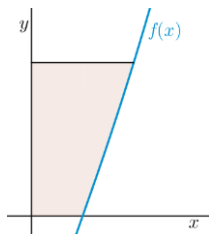
## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מיידיים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל יסודי                                                                                   | אינטגרל של פונקציה מורכבת                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$ | $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה  $\frac{m}{n} \neq -1$ .(48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$ .א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

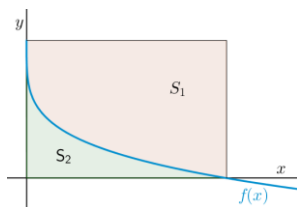
ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

(49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$ .

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

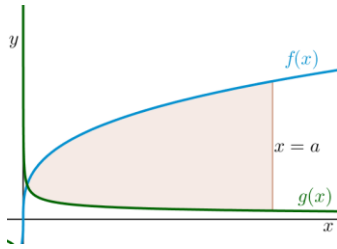
ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .ג. נעביר אנך לציר ה- $y$  מהנקודה  $(4, 6)$ .

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

(50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$ .

נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,

ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- $S_1$ ,ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$ .מצאו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .



51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} \text{ ו- } g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים

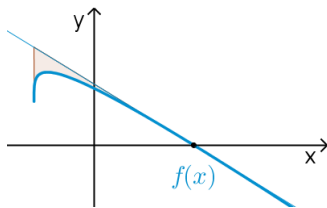
בתחום  $x > 0$ .

ב. נעביר אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$  (פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך,

הוא  $42\frac{3}{16}$  יח"ש.

מצאו את  $a$ .



52) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה

שבה  $x = 2$ .

א. מצאו את הפרמטר  $a$  וכתבו את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך

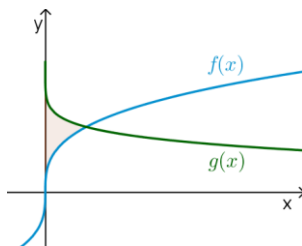
שלה עם ציר ה- $x$ .

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק שמצאנו בסעיף

הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה

שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.



53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ ו- } g(x) = 2 - \sqrt[6]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים

וציר ה- $y$ .

54) הנגזרת של  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$

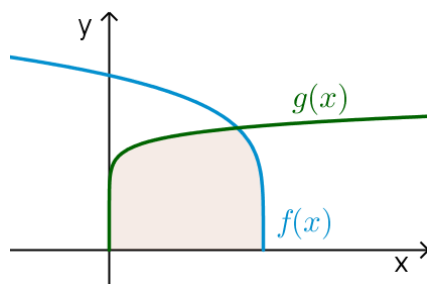
בנקודה שבה  $x = 1.2$ .

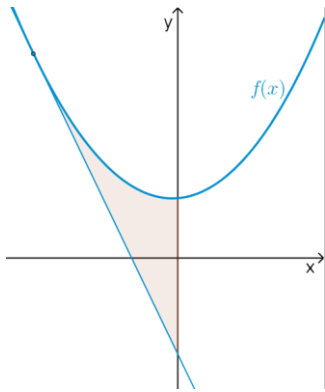
א. מצאו את  $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה  $f(x)$ , גרף הפונקציה

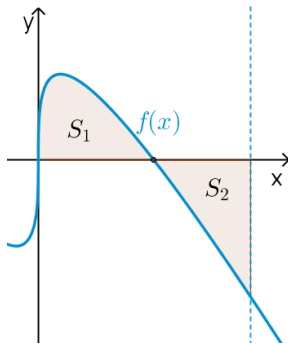
$g(x) = \sqrt[10]{x}$  וציר ה- $x$ .





55) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$ .

- מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .
- חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



56) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$ .

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  יסומן ב- $S_1$ .  
נעביר ישר  $x = k$ , אשר יוצר את השטח  $S_2$ , כמתואר באיור.  
מצאו את  $k$ , אם ידוע כי  $S_1 = S_2$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $57\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (2)  $21\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (3) א.  $g(x) = \Pi$  ,  $f(x) = I$  ב. שאלת הוכחה.
- (4)  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (5) א.  $y = -x$  ב.  $(-3, 3)$  ג.  $7\frac{5}{6}$  יח"ש.
- (6) א.  $y = -4x + 4$  ב.  $(1, 0)$  ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (7) א.  $k = 10$  ב.  $(1, 9)$  ג.  $81\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (8) א.  $f(x) = -x^2 + 3x + 10$  ב.  $27\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (9) א.  $g(x) = (x - 4)^2$  ב.  $5\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (10) א.  $f(x) = x^2 - 6x$  ב.  $(0, 0)$  ג.  $85\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (11) א.  $y = -x + 2$  ב.  $\frac{1}{8}$  יח"ש.
- (12) 1 יח"ש.
- (13) א.  $a = 32$  ,  $(2, 8)$  ב.  $13\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (14) א.  $a = 36$  ,  $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$  ב. 8 יח"ש.
- (15) א.  $A = 6$  ב.  $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$  ג. הוכחה. ד.  $\left(-1.5, \frac{2}{3}\right)$  ה.  $\frac{5}{8}$  יח"ש.
- (16) א.  $\min(0.5, 1.5)$  ב. 1.75 יח"ש.
- (17) א.  $(4, 8)$  ב. 48 יח"ש.
- (18) 2.26 יח"ש.
- (19) 0.5 יח"ש.
- (20)  $t = 16$
- (21) א. i.  $x > 0$  ii.  $(4, 0)$  iii.  $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$  ב.  $(16, 14)$  ג. 88 יח"ש.
- (22)  $b = 2$
- (23)  $a = 9$

- (24) א. שאלת הוכחה. ב.  $t=1$ .
- (25) א.  $a=13$  ב.  $(5,0)$  ג. i.  $S_1=2$  ii.  $S_2=|-S_1|=2$ .
- (26) ב. 10 יח"ש.
- (27) א. חיובית:  $x>5$ , שלילית:  $x<5$  ב. עולה:  $x>5$ , יורדת:  $x<5$  ג.  $\min(5,-2)$  ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (28) א. לא. הנקודה  $(3,0)$  היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש. ב. 1 יח"ש.
- (29) א.  $f(x): \Pi, f'(x): I$  ב. 1 יח"ש.
- (30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (31)  $S=0.192$  יח"ש.
- (32)  $b=2$
- (33) שאלת הוכחה.
- (34)  $a=\ln 2$
- (35) א.  $A(1,-e-2)$  ב.  $y=-(e+2)x$  ג.  $S=4.744$  יח"ש.
- (36) א.  $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}, a=-2$  ב. 1.52
- (37) א.  $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$  ב.  $S=1.03$  יח"ש.
- (38) א.  $y'=xe^x$  ב.  $a=2$
- (39)  $S=\ln 4$  יח"ש.
- (40)  $S=4\ln 2-2$  יח"ש.
- (41) א.  $f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}, a=2$  ב.  $S=1.76$  יח"ש.
- (42) א.  $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}, a=2, b=-4$  ב.  $x=2$  ג.  $S=6+\ln 256 \approx 11.54$  יח"ש.
- (43) א.  $f(x)=\frac{4}{x}$  ב.  $S=6-4\ln 2$  יח"ש.
- (44) א.  $S_1=2\ln k-\ln 16, S_2=2\ln k$  ב.  $S_2-S_1=\ln 16$  ג.  $k=8$
- (45) א.  $g(x)=\frac{2}{2x+5}$  ב.  $(-2,2)$  ג.  $S=\ln 5\frac{1}{3} \approx 1.674$  יח"ש.
- (46) ב.  $a=2$
- (47) א.  $(1,1)$  ב.  $a=5$  ג.  $\frac{S_1}{S_2}=5.955$
- (48) א.  $(0,0), (8,0)$  ב.  $S=16$  יח"ש.
- (49) א.  $x>0$  ב.  $(2,0)$  ג.  $S=18.149$  יח"ש.



$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a = 8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a=1 \quad \text{א.} \quad (52) \quad \text{ב.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ג.} \quad (-1.2, 1.2)$$

$$y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ד.} \quad \text{ה.} \quad S = 4.56 \quad \text{יח"ש.} \quad (53)$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (1, 1) \quad (54)$$

$$f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (55)$$

$$y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (56)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296.. \quad \text{ג.} \quad (0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{כל } x$$

## חישוב שטחים ביחס לציר ה- $y$

### שאלות

(1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה  $y^2 = -x$  והישר  $y = x + 6$ .

(2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה  $x = y^2 + 2$  והישר  $y = x - 8$ .

### תשובות סופיות

(1)  $20\frac{5}{6}$

(2)  $20\frac{5}{6}$

## אורך קשת

### שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad (8)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = x^2 \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} 3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \{ 82^{1.5} - 1 \} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17}+4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad (9)$$

# חדו"א 1 מ

פרק 26 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

- 1. חישוב נפח גוף-סיבוב ..... 332
- 2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב ..... 335
- 3. חישוב נפח גוף כללי ..... 336

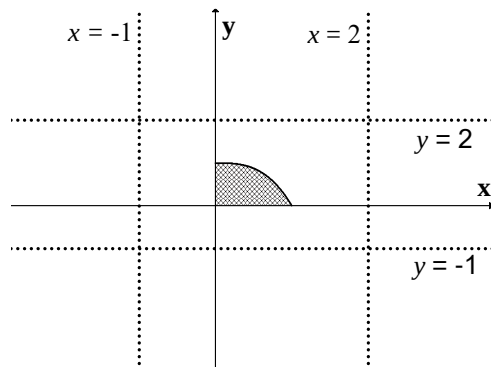
## חישוב נפח גוף-סיבוב

## שאלות

- (1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = 2x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:  
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).  
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

- (2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = 2x$  מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:  
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).  
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - x^3$  והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו. מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות 3-8:

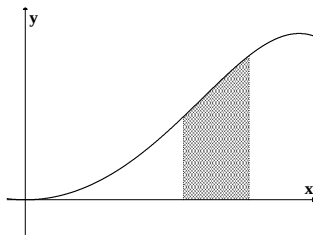


- (3) ציר ה- $x$ .  
(4) הישר  $y = -1$ .  
(5) הישר  $y = 2$ .  
(6) ציר ה- $y$ .  
(7) הישר  $x = -1$ .  
(8) הישר  $x = 2$ .

(9) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

(10) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

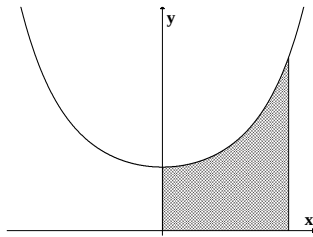
(11) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



**12** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = \sin(x^2)$

והישרים  $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ ,  $y = 0$

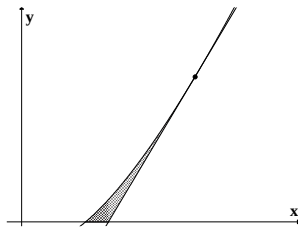
מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
מהו נפח הגוף המתקבל?



**13** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = e^{x^2}$

והישרים  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$

מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
מהו נפח הגוף המתקבל?



**14** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = x \ln x$

המשיק לגרף בנקודה  $(e, e)$  וציר ה- $x$ ,

מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
מהו נפח הגוף המתקבל?

**15** השטח הכלוא בין הגרפים של  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = 2x + 8$ ,  $x = 0$

מסתובב סביב הישר  $x = 4$ .

מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } \frac{64}{15}\pi \quad \text{ב. } \frac{64}{15}\pi$$

$$(2) \quad \text{א. } \frac{8}{3}\pi \quad \text{ב. } \frac{8}{3}\pi$$

$$(3) \quad \frac{9\pi}{14}$$

$$(4) \quad \frac{15\pi}{7}$$

$$(5) \quad \frac{33\pi}{14}$$

$$(6) \quad \frac{3\pi}{5}$$

$$(7) \quad 2.1\pi$$

$$(8) \quad \frac{12\pi}{5}$$

$$(9) \quad V = \pi R^2 \cdot H$$

$$(10) \quad V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3}$$

$$(11) \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$(12) \quad \frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$(13) \quad \pi(e-1)$$

$$(14) \quad \frac{e^3-4}{54}\pi$$

$$(15) \quad 128\pi$$

## חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

### שאלות

- (1) הפונקציה  $y = \sqrt{4-x^2}$ , עבור  $-1 \leq x \leq 1$ , מסתובבת סביב ציר ה- $x$ . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?
- (2) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.
- (3) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.
- (4) הפונקציה  $x = \sqrt{9-y^2}$ , עבור  $-2 \leq y \leq 2$ , מסתובבת סביב ציר ה- $y$ . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

### תשובות סופיות

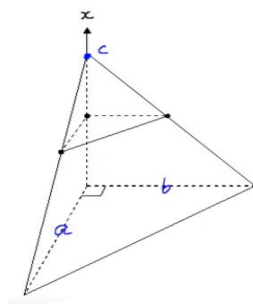
- (1)  $8\pi$
- (2)  $S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$
- (3)  $S = 4\pi R^2$
- (4)  $24\pi$



## חישוב נפח גוף כללי

## שאלות

- (1) מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה  $h$  ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו  $a$ .



- (2) חשבו את נפחה של פירמידה, שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).

## תשובות סופיות

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

$$\frac{abc}{6} \quad (2)$$

## חדו"א 1 מ

פרק 27 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי חישוב ..... 337
2. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי תיאוריה ..... 340
3. משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים ..... 343

## המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

### שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכיחו כי אם  $f(x)$  רציפה וגם  $a(x)$  ו- $b(x)$  גזירות, אזי:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

**11** חקרו את הפונקציה  $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$ , לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

**12** נתונה הפונקציה  $g(t) = \int_0^{t^2-1} f(x) dx$ , כאשר  $f(x) = 2 + \int_0^x (e^{y^2} + 2)^2 dy$ .

חשבו את  $g'(1)$  (הניחו כי  $f$  רציפה).

**13** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

נגדיר  $g(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $g''(x) = f(x)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**14** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ויהי  $\alpha \neq 0$ .

נגדיר  $g(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(t) \sin[\alpha(x-t)] dt$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $f(x) = g''(x) + \alpha^2 g(x)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**15** תהי  $f$  פונקציה רציפה וחיובית לכל  $x \geq 0$ .

הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$  מונוטונית יורדת בקטע  $[0, \infty)$ .

**16** מצאו את  $\int_e^4 f(x) dx$ , אם נתון כי  $\int_2^x \frac{1}{t-1} dt + \int_2^x f(t) dt = \int_2^x \frac{t^3 - t + 2}{t^2 - t} dt$ .

**17** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$ , בנקודה  $x_0 = 2\pi$ .

## תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

$$I'(x) = e^{-x^2} \quad (3)$$

$$I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2 \quad (4)$$

$$I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1) \ln(x^3 + x) \quad (5)$$

$$I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\frac{2}{3} \quad (8)$$

$$4e^{16} \quad (9)$$

$$0 \quad (10)$$

(11) תחום הגדרה: כל  $x$ .

נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל  $x$ .

נקודות פיתול:  $x = -1, 1, -\frac{3}{7}$ .

תחומי קמירות:  $x > 1$ ,  $-1 < x < -\frac{3}{7}$ .

תחומי קעירות:  $-\frac{3}{7} < x < 1$ ,  $x < -1$ .

$$40 \quad (12)$$

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

$$14 - 2 \ln 4 - \frac{1}{2}e^2 - e \quad (16)$$

$$y = x - 2\pi \quad (17)$$

## המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

### שאלות

1 נתונה הפונקציה  $f$  המוגדרת בקטע  $[0, 2]$  כך:  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ .

א. הוכיחו ש- $f$  אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  לכל  $x$  בקטע הנתון.

ג. בדקו האם  $F(x)$  רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם  $F'(x) = f(x)$ ?

2 נתונה הפונקציה  $f$  המוגדרת בקטע  $[-1, 1]$  כך:  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ .

א. הוכיחו ש- $f$  אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את  $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$  לכל  $x$  בקטע הנתון.

ג. בדקו האם  $F(x)$  רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם  $F'(x) = f(x)$ ?

3 נגדיר  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי  $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ .

נגדיר  $F: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי  $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ .

הוכיחו כי  $F' = f$  ב- $[-1, 1]$ , אבל  $\int_{-1}^1 f(t)dt$  לא קיים.

האם הדבר עומד בסתירה למשפט היסודי של החדו"א?

4 נתונה פונקציה אינטגרבילית  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$ .

(5) תהי  $f$  פונקציה אינטגרלית בקטע  $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b f(t) dt > 1$ .

הוכיחו שקיים  $x_1$  בקטע  $(a, b)$ , עבורו  $\int_a^{x_1} f(t) dt = 1$ .

(6) תהי  $f$  פונקציה רציפה ומחזורית לכל  $x$ , עם מחזור  $p$ .

הוכיחו שלאינטגרל  $\int_x^{x+p} f(t) dt$  יש את אותו הערך לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$  קבועה בקטע  $(0, \infty)$ ,

ומצאו את הקבוע הממשי  $C$  עבורו מתקיים  $f(x) = C$  לכל  $x \in (0, \infty)$ .

ב. הוכיחו כי  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$  לכל  $x > 0$ .

(8) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ונניח כי  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ .

הוכיחו שקיימת נקודה  $c \in (0, 1)$ , כך ש-  $f(c) = 3c^2$ .

(9) תהי  $f$  פונקציה רציפה ב-  $[0, \pi/2]$  ונניח כי  $\int_0^{\pi/2} f(t) dt = 0$ .

הוכיחו שקיימת נקודה  $c \in (0, \pi/2)$ , כך ש-  $f(c) = 2 \cos 2c$ .

(10) תהי  $f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים  $c \in [0, \pi/4]$ , כך ש-  $f(c) = 2 \cos 2c \int_0^{\pi/4} f(t) dt$ .

(11) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים  $c \in (0, 1)$ , כך ש-  $\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(c)$ .

(12) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

נניח כי  $\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$ .

הוכיחו כי  $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$ .

(13) תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ , ונניח כי קיימות שתי נקודות,  $x_1 < x_2$ ,

$$\int_a^{x_1} f(t) dt = \int_a^{x_2} f(t) dt \quad \text{בקטע } (a, b), \text{ שעבורו מתקיים}$$

א. הוכיחו כי קיים  $c$ , בקטע  $(a, b)$ , כך ש- $f(c) = 0$ .

ב. האם הטענה שבסעיף א' נכונה גם אם לא נדרוש ש- $f$  רציפה ב- $[a, b]$ ,

ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש- $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ ? נמקו.

(14) מצאו פונקציה קדומה לפונקציה  $f(x) = e^{-|x|}$ .

(15) תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בכל קטע  $[a, b]$ ,

$$\text{ונניח שלכל } x \in \mathbb{R} \text{ מתקיים } f(x) = \int_0^x f(t) dt$$

הוכיחו כי  $f(x) \equiv 0$  (כלומר, לכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים  $f(x) = 0$ ).

### תשובות סופיות

(1) א. שאלת הוכחה. ב.  $F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$  ג. רציפה ולא גזירה.

ד. לא.

(2) א. שאלת הוכחה. ב.  $F(x) = 0$  לכל  $x$  בקטע הנתון. ג. רציפה וגזירה.

ד. לא.

(7) א.  $C = 0$  ב. שאלת הוכחה.

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + D + 2 & x \geq 0 \\ e^x + D & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)



## משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

### שאלות

- (1) בסרטון התיאוריה הוכחנו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.  
נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך הממוצע של לגראנז'.

(2) תהי  $f$  רציפה ב- $[a, b]$ , ו- $\int_a^b f(x) dx = 1$ .  
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה  $(b-a)f(x) = 1$ .

(3) תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$ , ונניח כי  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ .  
וכי  $\int_a^{x_1} f(t) dt = \int_a^{x_2} f(t) dt$ .  
הוכיחו שקיים  $x$ , בקטע  $(a, b)$ , שעבורו  $f(x) = 0$ .

(4) הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי  $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(5) תהי  $f$  פונקציה רציפה ויורדת בקטע  $[n, n+1]$ .  
הוכיחו כי  $f(n+1) < \int_n^{n+1} f(x) dx < f(n)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(6) יהיו  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות המקיימות  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ .  
הוכיחו שקיימת נקודה  $c \in [a, b]$  כך ש- $f(c) = g(c)$ .

(7) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.  
הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0)$ .

(8) תהי  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

נתון כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ .

הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = a$ .

(9) חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה  $f(x) = \sin x \sin(x + \alpha)$  בקטע  $[0, 2\pi]$ .

(10) ניזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.

תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

אז קיימת נקודה  $c \in (a, b)$  כך ש-  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$

הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

(11) הוכח כי  $\frac{3}{\ln 2} \leq \int_2^4 \frac{x}{\ln x} dx \leq \frac{6}{\ln 2}$ .

(12) הוכח כי  $\frac{\pi^2}{9} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx \leq \frac{2\pi^2}{9}$ .

(13) הוכח כי  $\frac{1}{2e} \ln 2 \leq \int_0^{\pi/4} e^{-x^2} \tan x dx \leq \frac{1}{2} \ln 2$ .

(14) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

הוכח כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ .

(15) נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חדו"א 1 מ

פרק 28 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

|     |                                    |
|-----|------------------------------------|
| 345 | 1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון     |
| 347 | 2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני       |
| 348 | 3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי     |
| 349 | 4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים |
| 350 | 5. מבחני השוואה                    |
| 352 | 6. התכנסות בהחלט                   |
| 353 | 7. מבחן דיריכלה                    |
| 354 | 8. התכנסות בתנאי                   |

## אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-5 :

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

$$(6) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ עבור } |\alpha| < 1.$$

$$(7) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \text{ עבור } |\alpha| > 1.$$

**תשובות סופיות**

**(1)**  $\frac{1}{4}$

**(2)**  $\frac{\pi}{2}$

**(3)**  $\frac{1}{2e}$

**(4)** מתבדר :  $\infty$ .

**(5)**  $\frac{5}{4e^2}$

**(6)** שאלת הוכחה.

**(7)** שאלת הוכחה.

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

### תשובות סופיות

(1) מתבדר :  $-\infty$

(2) מתבדר :  $-\infty$

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

### שאלה

(1) חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ .

### תשובה

(1) מתבדר:  $\infty$ .

## שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

### שאלות

(1) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה  $y = e^{2x}$ , הישר  $x=1$  וציר ה- $x$ , עבור  $x \leq 1$ .

(2) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$  והישר  $x=5$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$ .

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $0 \leq x \leq k$ , שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $x \geq k$ . מצאו את הקבוע  $k$ .

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$



## מבחני השוואה

## שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1 + x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

**תשובות סופיות**

- |             |             |
|-------------|-------------|
| (1) מתכנס.  | (2) מתבדר.  |
| (3) מתכנס.  | (4) מתכנס.  |
| (5) מתבדר.  | (6) מתבדר.  |
| (7) מתכנס.  | (8) מתכנס.  |
| (9) מתבדר.  | (10) מתכנס. |
| (11) מתכנס. | (12) מתבדר. |
| (13) מתכנס. | (14) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |

## התכנסות בהחלט

### שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם האינטגרלים מתכנסים:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{הוכיחו: אם } \int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ מתכנס, אז } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

### תשובות סופיות

(1) מתכנס.

(2) מתכנס.

(3) מתכנס.

(4) שאלת הוכחה.

## מבחן דיריכלה

### שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

$$(1) \quad \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx$$

$$(2) \quad \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^{\infty} \sin(x^2) dx$$

$$(3) \quad \int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## התכנסות בתנאי

### שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

$$(1) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$\text{ב.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx$$

$$(4) \quad \int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(5) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx$$

## תשובות סופיות

- (1) א. מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$  ומתבדר עבור  $p \geq 2$ .  
 ב. מתכנס בהחלט.  
 ג. מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$  ומתבדר עבור  $p \geq 2$ .
- (2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.
- (3) א. מתכנס בתנאי עבור  $0 < p \leq 1$ , מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$ ,  
 מתבדר עבור  $p \geq 2$ .  
 ב. מתכנס בתנאי עבור  $-3 < p \leq 1$ , מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 5$ ,  
 מתבדר עבור  $p \geq 5$ .
- (4) מתכנס בתנאי.
- (5) מתכנס בתנאי.

# חדו"א 1 מ

פרק 29 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

|     |                                 |
|-----|---------------------------------|
| 356 | 1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים |
| 359 | 2. מבחן ההתבדרות של טורים       |
| 360 | 3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים |
| 362 | 4. מבחני התכנסות לטורים כלליים  |
| 364 | 5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי |
| 365 | 6. תרגילי תיאוריה               |

## טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

### שאלות

#### טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} & (3) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n & (1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} & (5) & \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} & (4) \end{array}$$

#### טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} & (8) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} & (7) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} & (10) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) & (9) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} & (11) \end{array}$$

#### טור הרמוני מוכלל

(12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} & \text{ג.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{ב.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} & \text{א.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} & \text{ו.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} & \text{ה.} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} & \text{ד.} \end{array}$$



## תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$     ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$     ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$ , אם ידוע כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא  $0.123123123... + 0.141414...$ .

## תשובות סופיות

- (1) מתכנס ל-  $\frac{11}{14}$ .  
 (2) מתכנס ל-  $\frac{1}{3}$ .  
 (3) מתבדר.  
 (4) מתכנס ל-  $-\frac{64}{7}$ .  
 (5) מתכנס ל-  $\frac{11}{12}$ .  
 (6) מתכנס ל- 8.  
 (7) מתכנס ל-  $\frac{1}{2}$ .  
 (8) מתכנס ל-  $\frac{1}{12}$ .  
 (9) מתבדר.  
 (10)  $S = \frac{1}{\ln 2}$   
 (11)  $\frac{1}{12}$   
 (12) א. מתכנס.  
 ב. מתבדר.  
 ג. מתבדר.  
 ד. מתבדר.  
 ה. מתכנס.  
 ו. מתכנס.  
 (13) א. מתכנס.  
 ב. מתבדר.  
 ג. מתבדר.  
 (14)  $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$   
 (15)  $\frac{323}{1221}$

## מבחן ההתבדרות של טורים

### שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

|                                                      |                                    |                                                         |
|------------------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$                       | ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$    | ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$                         |
| ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$ | ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ | ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n}{n} \right)^n$ |

### תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

## מבחני התכנסות לטורים חיוביים

### שאלות

#### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ .

ב. מצאו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$ .

#### מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sin^2 n}{n!} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

## מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראפה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

## תשובות סופיות

- |               |             |             |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר.    | (2) מתבדר.  | (3) מתכנס.  |
| (4) מתכנס.    | (5) מתבדר.  |             |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0        |             |
| (7) מתכנס.    | (8) מתבדר.  | (9) מתכנס.  |
| (10) מתבדר.   | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר.   | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר.   | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס.   | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס.   | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר.   | (26) מתבדר. |             |

## מבחני התכנסות לטורים כלליים

### מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

### מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

$$(7) \quad \text{הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :}$$

$$\sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}} \quad (\theta \neq 2\pi k).$$

$$(8) \quad \text{בדקו התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

$$(10) \quad \text{ענו על שני הסעיפים הבאים :}$$

$$א. \text{ הוכיחו שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\bmod 7) \text{ הוא טור חסום.}$$

$$ב. \text{ בדקו את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}.$$

## מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר :

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

## תשובות סופיות

- |                |             |             |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס.     | (2) מתכנס.  | (3) מתכנס.  |
| (4) מתכנס.     | (5) מתכנס.  | (6) הוכחה.  |
| (7) הוכחה.     | (8) מתבדר.  | (9) הוכחה.  |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס.   | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס.    | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

## התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

### שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} & (3) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} & (1) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} & (5) & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} & (4) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} & (9) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} & (8) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} & (7) \end{array}$$

### תשובות סופיות

- |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר.       | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |



## תרגילי תיאוריה

(1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

(2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

ב. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתכנס, אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.

ג. אם  $\sum a_n$  מתכנס, אז  $\sum a_n^2$  מתכנס.

(3) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$  מתבדר.

(4) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ומתכנס, אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  מתכנס.

(5) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$  מתכנס.

(6) א. נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$  מתבדר אם  $\sum a_n^2$  מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

(7) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי  $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$  מתכנס.

(8)  $\sum a_n$  הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$  מתכנס.

(9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה  $(a_n)_{n \geq 1}$  מקיימת  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$  לכל  $n$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  מתכנס.

(10) נניח כי  $a_n \geq 0$ .

הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  מתכנס.

(11) הוכיחו או הפריכו:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס והסדרה  $b_n$  חסומה, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס.

(12) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$  מתבדר.

(13) הוכיחו או הפריכו:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , אז  $\sum b_n$  מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$  מתכנס.

**16** נתונים שני טורים חיוביים  $\sum a_n, \sum b_n$ .

א. נתון שהטורים  $\sum a_n^2, \sum b_n^2$  מתכנסים.

1. הוכיחו כי  $\sum a_n b_n$  מתכנס.

2. הוכיחו כי  $\sum (a_n + b_n)^2$  מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  מתכנס.

**17** הוכיחו :

א. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$ , אז הטור מתבדר.

ב. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\sum (na_n - k)$  מתכנס (כאשר  $k \neq 0$ ),

אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר.

**18** הוכיחו כי אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$ , אז הטור מתכנס.

**19** נתון  $a_n \geq 0$  לכל  $n$ .

א. נתון כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

ב. נתון כי  $\sum (n^3 a_n^2 - k)$  מתכנס (כאשר  $k > 0$ ).

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

**20** הסדרה  $(a_n)$  מוגדרת על ידי  $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_1 = \frac{21}{20}$ , כאשר  $(n \geq 1)$ .

האם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n.$$

הוכיחו כי  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  מתכנס.

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1.$$

$$\text{האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}, a_n > 0 \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

הוכיחו כי  $\sum a_n$  מתבדר.

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n.$$

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.  
 ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענו על הסעיפים הבאים:}$$

א. הוכיחו כי הסדרה  $a_n$  מתכנסת אם ורק אם  $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$  מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$  מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה  $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

(28) פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ , גזירה ב-0 ומקיימת  $f(0) = 0$ . הוכיחו כי אם  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט, אז  $\sum f(a_n)$  מתכנס בהחלט.

(29) נתון  $p(x)$  פולינום.

$\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

הוכיחו כי  $\sum P(a_n)$  מתכנס  $\Leftrightarrow p(0) = 0$ .

(30) יהיו  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס. (2)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  לכל  $n$  טבעי.

הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

# חדו"א 1 מ

פרק 30 - תרגילים מתקדמים נוספים (הפרק באנגלית)

תוכן העניינים

|     |                                                                   |
|-----|-------------------------------------------------------------------|
| 370 | 1. סדרות                                                          |
| 371 | 2. גבולות ורציפות                                                 |
| 372 | 3. משפט ערך הביניים ומשפט ויירשטראס                               |
| 373 | 4. גזירות ומשפטי הערך הממוצע                                      |
| 375 | 5. טורי חזקות וטורי טיילור                                        |
| 376 | 6. המשפט היסודי של החדוא, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן |
| 378 | 7. נפח שטח מעטפת ומשפט פאפוס                                      |

## Convergence of a Sequence, Monotone Sequences (סדרות)

### Questions

- 1) Let  $A$  be a non-empty subset of  $\mathbb{R}$  and  $\alpha = \inf A$ . Show that there exists a sequence  $(a_n)$  such that an  $a_n \in A$  for all  $n \in \mathbb{N}$  and  $a_n \rightarrow \alpha$ .
- 2) Let  $A$  be a non-empty subset of  $\mathbb{R}$  and  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Show that there exists a sequence  $(a_n)$  in  $A$  such that  $|x_0 - a_n| \rightarrow d(x_0, A)$ . Recall that  $d(x, A) = \inf \{|x - a| : a \in A\}$ .
- 3) Let  $(a_k)$  be a bounded sequence. For every  $n \in \mathbb{N}$ , define  $x_n = \sup\{a_k : k < n\}$ . Show that the sequence  $(x_n)$  converges.

### Cauchy Criterion, Bolzano - Weierstrass Theorem

- 4) Show that a sequence  $(x_n)$  of real numbers has no convergent subsequence if and only if  $|x_n| \rightarrow \infty$ .
- 5) Let  $(x_n)$  be a sequence in  $\mathbb{R}$  and  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Suppose that every subsequence of  $(x_n)$  has a subsequence converging to  $x_0$ . Show that  $x_n \rightarrow x_0$ .
- 6) Let  $(x_n)$  be a sequence in  $\mathbb{R}$ . We say that a positive integer  $n$  is a peak of the sequence if  $m > n$  implies  $x_n > x_m$  (i.e., if  $x_n$  is greater than every subsequent term in the sequence).
  - a) If  $(x_n)$  has infinitely many peaks, show that it has a decreasing subsequence.
  - b) If  $(x_n)$  has only finitely many peaks, show that it has an increasing subsequence.
  - c) From (a) and (b) conclude that every sequence in  $\mathbb{R}$  has a monotone subsequence. Further, every bounded sequence in  $\mathbb{R}$  has a convergent subsequence (An alternate proof of Bolzano-Weierstrass Theorem).

## Continuity and Limits (גבולות ורציפות)

### Questions

- 1) Let  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$ . Show that  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .
- 2) Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Suppose  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  exists.  
Show that  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x + x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .
- 3) Let  $f(x) = |x|$  for every  $x \in \mathbb{R}$ . Show that  $f$  is continuous on  $\mathbb{R}$ .
- 4) Let  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by  $f(0) = 0$  and  $f(x) = x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  for  $x \neq 0$ .  
Is  $f$  continuous?
- 5) Let  $[\cdot]$  denote the integer part function and  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by  $f(x) = [x^2] \sin \pi x$ .  
  - a) Show that  $f$  is continuous at each  $x \neq \sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . [Here  $\mathbb{N}$  includes 0]
  - b) Show that  $f$  is continuous at each  $x = k \in \mathbb{N}$ .
  - c) Show that  $f$  is discontinuous at each  $x = \sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  such that  $x \notin \mathbb{N}$ .
- 6) Let the function  $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$  be one-one and onto. Suppose  $f$  is continuous.  
Show that  $f^{-1}$  is also continuous.
- 7) Let  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  be given by
 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{if } x = \frac{p}{q} \text{ where } p, q \in \mathbb{N} \text{ and } p, q \text{ have no common factor} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$
  - a) Suppose  $x_n \rightarrow x_0$  for some  $x_0$ , with  $x_n \neq x$  for all  $n \in \mathbb{N}$ , and suppose  $x_n = \frac{p_n}{q_n} \in (0, 1)$  where  $p_n, q_n \in \mathbb{N}$  have no common factors. Show that  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ .
  - b) Show that  $f$  is continuous at every irrational.
  - c) Show that  $f$  is discontinuous at every rational.



## Existence of Extrema, Intermediate Value Property (משפט ערך הביניים ומשפט ויירשטראס)

### Questions

- 1) Give an example of a function  $f$  on  $[0,1]$  which is not continuous but satisfies the IVP\*. \*We say that  $f$  has the property IVP [Intermediate Value Property] on  $[a,b]$  if for every  $x, y \in [a,b]$  and  $\alpha$  satisfying  $f(x) < \alpha < f(y)$  or  $f(x) > \alpha > f(y)$  there exists  $x_0 \in [x, y]$ , such that  $f(x_0) = \alpha$ .
- 2) Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous function. Show that  $f$  is a constant function if
  - a)  $f(x)$  is rational for each  $x \in \mathbb{R}$ .
  - b)  $f(x)$  is an integer for each  $x \in \mathbb{Q}$ .
- 3) Let  $p(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a polynomial function of odd degree. Show that  $p$  is onto.
- 4) Let  $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous such that
 
$$\inf\{f(x) : x \in [0,1]\} = \inf\{g(x) : x \in [0,1]\}.$$
 Show that there exists  $x_0 \in [0,1]$  such that  $f(x_0) = g(x_0)$ .
- 5) A cross country runner runs continuously an eight kilometers course in 40 minutes without taking rest. Show that, somewhere along the course, the runner must have covered a distance of one kilometer in exactly 5 minutes.
- 6) Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous function.
  - a) Suppose  $f$  attains each of values exactly two times. Given:
 
$$f(x_1) = f(x_2) = \alpha \text{ for some } x_1, x_2, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ and } f(x_0) > \alpha \text{ for some } x_0 \in [x_1, x_2].$$
 Show that  $f$  attains its maximum in  $[x_1, x_2]$  exactly at one point.
  - b) Using (a) show that  $f$  cannot attain each of its values exactly two times.

## Mean Value Theorem, L'Hôpital's Rule, Differentiability (משפט לגראנז', כלל לופיטל וגזירות)

### Questions

- 1) Does there exist a differentiable function  $f:[0,2] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 4$  and  $f'(x) \leq 2$ , for all  $x \in [0,2]$ ?
- 2) Let  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be differentiable such that for some  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|f'(x)| \leq \alpha < 1$  for all  $x \in \mathbb{R}$ . Let  $a_1 \in \mathbb{R}$  and define a sequence  $(a_n)$  recursively by  $a_{n+1} = f(a_n)$ . Show that  $(a_n)$  converges.
- 3) Let  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  be differentiable and let  $\alpha \in \mathbb{R}$  be such that  $f'(a) < \alpha < f'(b)$ . Define  $g(x) = f(x) - \alpha x$  for all  $x \in [a,b]$ .
  - a) Show that there exists  $c \in [a,b]$  such that  $g'(c) = 0$ .  
Hint: prove by contradiction, noting that  $g'(a) < 0$  and  $g'(b) < 0$ .
  - b) From the above, conclude that if a function  $f$  is differentiable on an interval  $[a,b]$ , then  $f'$  has the Intermediate Value Property on  $[a,b]$ .
- 4) Suppose  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous and  $\int_0^1 f(t)dt = 1$ .
  - a) Show that there exists  $c \in (0,1)$  such that  $f(c) = 1$ .
  - b) Show that there exist  $c_1 \neq c_2$  in  $(0,1)$  such that  $f(c_1) + f(c_2) = 2$ .
- 5) Let  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  be such that  $|f'(x)| < 10$  for all  $x \in (0,1)$  and let  $(x_n)$  be a sequence in  $(0,1)$  satisfying the Cauchy criterion. Show that the sequence  $(f(x_n))$  converges.
- 6) Let  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  and  $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ ,  $n=1,2,\dots$   
Show that:
  - a) if  $f$  is continuous, then  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converges;
  - b) if  $f$  is differentiable and  $|f'(x)| < \frac{1}{2} \forall x \in [0,1]$ , then  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos n) \sqrt{n}$  converges.

- 7) Let  $p(x) = a + bx + cx^2$ . Find all values of  $a, b, c \in \mathbb{R}$  for which the function  $p(|x|)$  is differentiable at 0.

## Power Series, Taylor Series (טורי חזקות וטורי טיילור)

### Questions

- 1) Let  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  be infinitely differentiable and let  $x_0 \in (a, b)$ . Suppose that there exists  $M > 0$  such that  $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$  for all  $n \in \mathbb{N}$  and  $x \in (a, b)$ . Show that Taylor's series of  $f$  around  $x_0$  converges to  $f(x)$  for all  $x \in (a, b)$ .
  
- 2) Let  $(a_n)$  be a sequence of nonnegative reals and suppose that  $(a_n^{\frac{1}{n}})$  is a bounded sequence. For each  $n$ , define  $A_n = \sup\{a_k^{\frac{1}{k}} : k \geq n\}$ .  $(A_n)$  converges since it is decreasing and bounded below (by 0). So  $A_n \rightarrow L$  for some  $L \geq 0$ .
  - a) Show that if  $L < 1$ , the series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converges and if  $L > 1$  the series diverges.
  - b) Show that the radius of convergence of the power series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  is  $\frac{1}{L}$ .

## המשפט היסודי של החדו"א, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן

### שאלות

(1) תהי  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת כך:  $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ,

ונגדיר את  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  עבור  $-1 \leq x \leq 1$ .

שרטטו את הגרפים של  $f$  ו- $F$ , בהינתן:

א.  $f$  אינה רציפה (ב-0), אבל  $F$  רציפה.

ב.  $F$  אינה גזירה ב-0.

ג. תן דוגמה לפונקציה  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f$  אינה רציפה ב-0,

אבל  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  גזירה ב-0.

(2) הוכיחו את 'משפט ערך הביניים השני לאינטגרלים', בהנחה שהפונקציות רציפות (ולא אינטגרביליות):

תהי  $f$  רציפה ב- $[a, b]$ .

אם קיימת פונקציה גזירה  $F$  ב- $[a, b]$ , כך ש- $F' = f$ ,

אז  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

(3) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה.

הוכיחו כי  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, f) = \int_a^b f(x) dx$ .

סימונים:  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  עם  $x_0 = a$  ו- $x_n = b$ ,  $S(P, f) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,

$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ ,  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

(4) תהי  $a_n = \ln \left( \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \right)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

המירו את  $a_n$  לסכום רימן ומצאו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(5) תהינה  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f'$  ו- $g'$  רציפות ב- $[a, b]$ .

הוכיחו כי  $\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$ .

**(6)** תהי  $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ברציפות, ותהי  $f$  רציפה בטווח של  $\phi$ .

$$\text{הוכיחו כי } \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx$$

**(7)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ויהיו  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירות.

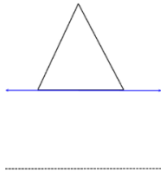
הוכיחו כי אם הטווחים של  $u$  ו- $v$  מוכלים ב- $[a, b]$ ,

$$\text{אז } \frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## נפח שטח מעטפת ומשפט פאפוס

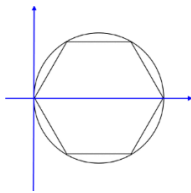
### שאלות



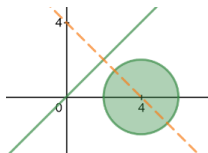
- (1) נתון משולש שווה צלעות עם בסיס המתלכד עם ציר ה- $x$ .  
אורך צלע המשולש  $a$ .  
השתמשו במשפט פאפוס על מנת לחשב את נפח הגוף,  
הנוצר על ידי סיבוב המשולש סביב הישר  $y = -a$ .



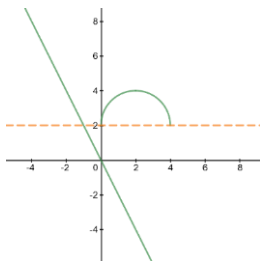
- (2) השתמשו במשפט פאפוס ומצאו את מרכז הכובד של התחום  
 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$   
רמז: נפח כדור בעל רדיוס  $r$ , הוא  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .



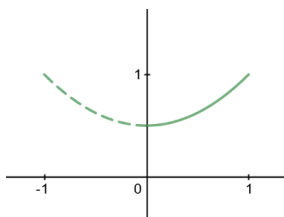
- (3) נתון משושה החסום במעגל  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ .  
המשושה מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
מצאו את שטח הפנים של השטח שנוצר,  
ואת נפח הגוף שנוצר.



- (4) הדיסק המעגלי  $(x-4)^2 + y^2 \leq 4$  מסתובב סביב הציר  $y = x$ .  
מצאו את נפח הגוף שנוצר.



- (5) נתבונן בקשת המעגלית  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4, y \geq 2$ .  
הקשת מסתובבת סביב הציר  $y + 2x = 0$ .  
מצאו את שטח הפנים של הגוף שנוצר.



- (6) יהיו  $(\bar{x}, \bar{y})$  מרכז העקום  $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1), 0 \leq x \leq 1$ .  
מצאו את  $\bar{x}$  בעזרת משפט פאפוס.